PRINCIPJ

DI

MATEMATICA SUBLIME

AD USO

DELLE REGIE SCUOLE MILITARI

D'ARTIGLIERIA E FORTIFICAZIONE.

TORINO MDCCCXIV,

DALLA STAMPERIA BARBERIS,
Contrada degli Stampatori, N. 5.

INDICE
DELLE MATERIE

LIBRO PRIMO.

Della natura, e del maneggiamento delle equazioni di grado superiore . . . . pag. 1

CAPO I. *Della Genesi, e delle Proprietà delle equazioni* 2

CAPO II *Del modo di trasformare le equazioni* . . 40

CAPO III *Indagare, se nell'equazione s' incontrano delle radici immaginarie* . 58

CAPO IV *Trovare i valori reali dell' incognita nelle equazioni numeriche di grado superiore* 73

CAPO V *Risolvere i problemi numerici di grado superiore, le di cui equazioni finali sono affette in una maniera qualsivoglia* 105

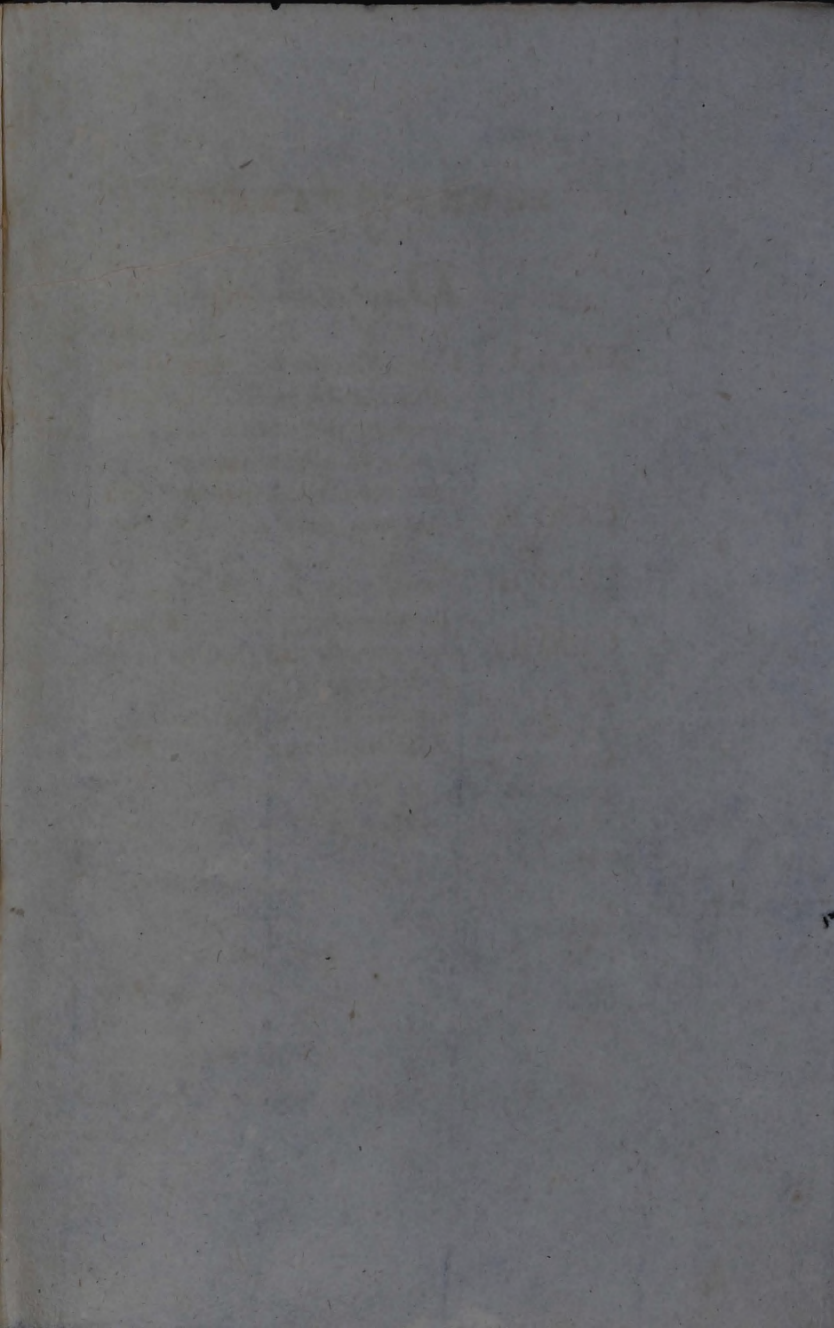
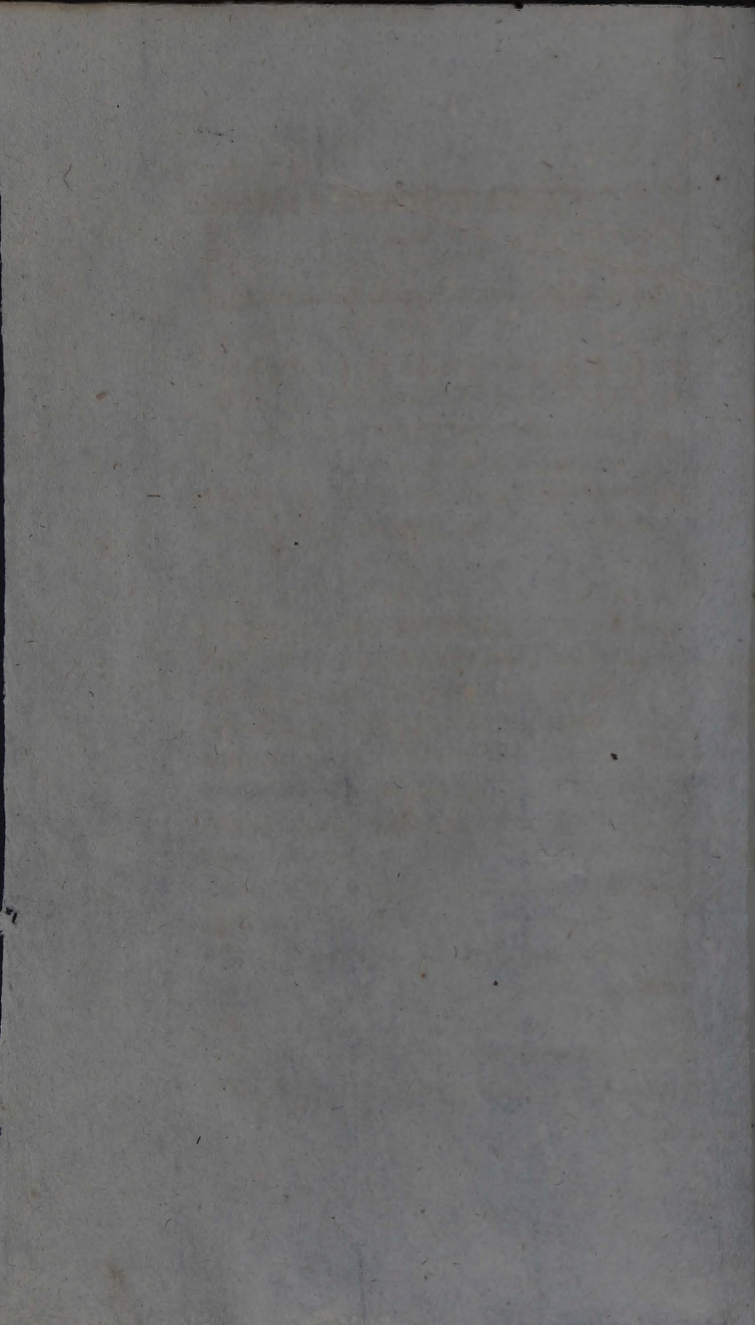
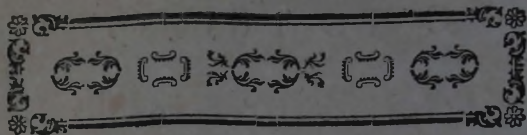
LIBRO SECONDO.

	Della Dottrina generale delle Linee Curve . . . . . . pag.	142
CAPO I	*Della genesi delle Curve di diversa specie, e di diverso grado* . . .	147
CAPO II	*Della natura delle Curve Geometriche, e delle Trascendentali* . .	163
CAPO III	*Delle Curve Organiche*	192
CAPO IV.	*Data l' equazione indeterminata di grado superiore, costruire il corrispondente Luogo geometrico*	201
CAPO V	*Costruire le equazioni determinate di qualsivoglia grado superiore al quarto*	221

LIBRO TERZO.

	Del Calcolo Differenziale . . . pag.	241
CAPO I	*Delle flussioni, o Differenze di diverso ordine, e del Calcolo delle medesime. . . . .*	242
CAPO II	*Data l' equazione di una curva, trovare cosa sia la tangente, la sottotangente, la normale, la sottonormale, e se la curva abbia assintoti obbliqui all' asse . .*	265
CAPO III	*Del Metodo de' Massimi, e de' Minimi . .*	298
CAPO IV	*Dei punti di Flesso contrario, e di Regresso, dei Raggi osculatori, e delle Evolute .*	314

LIBRO QUARTO.

	Del Calcolo Integrale . . . . . pag.	328
CAPO I	*Delle Regole per integrare le formole differenziali del primo ordine, le quali contengono una sola variabile*	330
CAPO II	*Dell' uso delle date regole*	355
CAPO III	*Del Metodo Inverso delle tangenti* . . .	380
CAPO IV	*Del calcolò delle quantità logaritmiche, ed esponenziali, e dell' uso delle medesime* . .	395

LIBRO PRIMO.

Della Natura, e del Maneggiamento delle Equazioni di grado superiore.

1. Il maneggiamento delle equazioni spiegato ne' precedenti trattati serve particolarmente per risolvere que' problemi, che si sogliono comprendere fra gli elementari: ma per rendere questa dottrina universale, ed applicarla alla soluzione dei problemi di qualsivoglia grado, d'uopo è conoscere la natura, e l'indole delle equazioni composte. Una tale cognizione, e l'applicazione di simil teoria alla pratica formano l'oggetto di questo primo Libro.

CAPO PRIMO.

Della Genesi, e delle Proprietà delle Equazioni.

2. Le equazioni di grado superiore si considerano prodotte dalla moltiplica di due, o più equazioni semplici ridotte al zero, le quali esser possono del primo grado, del secondo, del terzo ec., come $x - a = o$, $y + c = o$, $z^2 - d^2 = o$, $x^3 + a^3 = o$, $y^4 - c^3 m = o$. I valori lineari delle incognite nelle equazioni di grado superiore possono essere fra loro uguali, o disuguali, positivi, o negativi, razionali, o sordi, reali, o immaginarj.

3. A quattro casi si può ridurre la genesi delle equazioni di grado superiore.

1.° Allorchè le componenti sono tutte del primo grado.

2.° Quando le componenti sono di grado superiore al primo, e tutte dello stesso grado.

3.° Qualora le equazioni componenti sono tutte di diverso grado.

4.° Allorchè fra le equazioni componenti di grado diverso se ne incontrano alcune, che sono del medesimo grado.

Cominciamo a esaminare le equazioni prodotte da quelle del primo grado.

4. Abbiansi due valori positivi di un' incognita $x = a$, $x = c$, col ridurre queste equazioni uguali al zero, si ha $x - a = 0$, $x - c = 0$, le quali, essendo fra esse moltiplicate, danno l'equazione composta $x^2 \left.\begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix}\right\} x + ac = 0$, in cui, dopo d' aver ordinati i termini secondo i gradi dell' incognita, s' osserva

1.° Che l' equazione ha tutti i suoi termini, e che il primo termine contiene la sola incognita elevata alla potestà indicata dal numero delle equazioni componenti.

2.° Che il coefficiente del secondo termine contiene la somma dei due valori dell' incognita col segno mutato.

3.° Che l' ultimo termine denominato l' *Omogeneo* di comparazione è prodotto dalla moltiplica dei due valori, ed ha il segno proprio.

4.° Che i segni, i quali precedono i termini dell' equazione, sono al-

ternamente positivi, e negativi.

5.° Se si suppone, che sia $a = c$, l' equazione composta diventa una potestà perfetta $x^2 - 2ax + a^2 = 0$.

5. Le equazioni di primo grado, le quali producono un' equazione di grado superiore, si chiamano *Radici dell' equazione composta.*

6. Ciò, che detto è dei valori positivi dell' incognita di un' equazione composta (§. 4.), dire si dee dei valori negativi, col solo divario, che tutti i termini dell'equazione hanno in questo caso il segno $+$, come s' osserva nella seguente equazione prodotta dai due valori negativi $x + a = 0$, $x + c = 0$

$$x^2 \left.\begin{matrix} + a \\ + c \end{matrix}\right\} x + ac = 0 .$$

Ma, se uno dei valori sarà positivo, e l' altro negativo, allora la sequela de' segni riuscirà con ordine perturbato, ed il coefficiente del secondo termine sarà espresso dalla differenza fra i due valori col segno contrario; continuando però sempre l' omogeneo ad essere il prodotto dei due valori col segno proprio. Se le due radici sono $x - a = 0$, $x + c = 0$, l' equazione com-

posta sarà $x^2 \left.\begin{matrix} -a \\ +c \end{matrix}\right\} x - ac = 0$, in cui, correggendo l'espressione, il coefficiente del secondo termine sarà positivo, o negativo, secondo che sarà c maggiore, o minore di a. Qualora poi sarà $a = c$, allora il secondo termine scomparirà, e l'equazione composta diventerà semplice, come $x^2 - a^2 = 0$.

7. Abbiansi tre valori positivi dell'incognita $y = a$, $y = b$, $y = c$, col ridurre queste equazioni uguali al zero, si ha $y - a = 0$, $y - b = 0$, $y - c = 0$. Si moltiplichino fra esse, e si ha la composta

$$y^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} y - abc = 0,$$

in cui, dopo d'avere ordinati i termini secondo i gradi dell'incognita, s'osserva pure (§. 4)

1.° Che l'equazione ha tutti i suoi termini, e che il primo termine contiene la sola incognita elevata alla potestà indicata dal numero delle equazioni componenti.

2.° Che il coefficiente del secondo termine contiene la somma dei valori

dell' incognita col segno mutato.

3.° Che il coefficiente del terzo termine contiene la somma di tutti i prodotti d' essi valori da due in due col segno proprio, e che l' omogeneo è il prodotto dei tre valori col segno mutato.

4.° Che i segni sono alternamente positivi, e negativi.

5.° Se si supporranno fra loro uguali i tre valori di y, l' equazione composta riuscirà una potestà perfetta.

$$y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 = 0.$$

8. Se della precedente equazione i valori di y saranno negativi, l' equazione composta avrà la stessa forma, col solo divario, che tutti i suoi termini avranno il segno $+$.

Ma se uno, o due valori saranno positivi, e l' altro sarà negativo, allora la sequela de' segni si manifesterà con ordine perturbato, e, dopo d' aver corretta l' espressione, il coefficiente del secondo termine esprimerà la differenza fra i valori dell' incognita col segno mutato; e, se i due valori positivi saranno uguali al negativo, esso secondo termine scomparirà. I tre prodotti, che formano il

coefficiente del terzo termine, avranno pure segni diversi, di modo che questo coefficiente sarà la differenza fra essi prodotti col segno proprio, ed allorchè la loro differenza sarà zero, il terzo termine scomparirà. Quanto poi all' omogeneo, esso sarà sempre il prodotto dei tre valori dell' incognita col segno mutato.

9. Se le equazioni $z - a = 0$, $z - b = 0$, $z - c = 0$, $z - d = 0$ si moltiplicheranno fra esse, s' avrà la composta

$$z^4 \left.\begin{matrix}-a\\-b\\-c\\-d\end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix}-abc\\-abd\\-acd\\-bcd\end{matrix}\right\} z + abcd = 0,$$

in cui, dopo d' aver ordinati i termini secondo i gradi dell' incognita, s'osserva

1.° Che la medesima ha tutti i suoi termini, e che il primo termine contiene la sola incognita elevata alla potestà indicata dal numero delle equazioni componenti.

2.° Che il coefficiente del secondo termine contiene la somma dei quattro valori col segno mutato.

3.° Che il terzo termine contiene la somma dei prodotti d' essi valori di due in due col segno proprio.

4.° Che il coefficiente del quarto termine contiene la somma dei prodotti di tre in tre col segno mutato, e che l' omogeneo è il prodotto d' essi valori col segno proprio.

5.° Che i segni sono alternamente positivi, e negativi.

6.° Se si supporrà, che i quattro valori sieno fra loro uguali, l' equazione composta riuscirà una potestà perfetta

$$z^4 - 4az^3 + 6a^2z^2 - 4a^3z + a^4 = 0.$$

10. Le osservazioni fatte rispetto ai valori positivi dell' incognita z (§. 9), si debbono applicare precisamente ai valori negativi, col solo divario, che tutti i termini dell' equazione composta avranno il segno $+$.

Occorrendo poi, che alcuni valori dell' incognita sieno positivi, ed altri negativi, allora i segni saranno disposti con ordine perturbato, il coefficiente del secondo termine esprimerà la differenza fra i valori dell' incognita col segno mutato; e qualora questa differenza sarà zero, il secondo termine scom-

parirà. Il coefficiente del terzo termine sarà pure la differenza fra li prodotti d'essi valori di due in due col segno proprio, e questo termine scomparirà, ognorachè la differenza fra essi prodotti sarà zero. Il coefficiente del quarto termine sarà la differenza fra li prodotti di tre in tre col segno mutato, e questo termine scomparirà pure, se la differenza fra i prodotti sarà zero. L'omogeneo sarà poi sempre il prodotto di tutti i valori col segno proprio.

11. Allorchè nelle equazioni componenti i valori dell'incognita sono espressi da radicali, l'equazione prodotta dalla moltiplica di esse ha la forma, e le proprietà istesse, che si sono osservate nelle equazioni precedenti nate da quantità razionali.

Se si moltiplica $x - a = \emptyset$, per $x - \sqrt{cm} = \emptyset$, si ha l'equazione composta

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - a \\ \quad - \sqrt{cm} \end{array}\right\} x + a\sqrt{cm} = \emptyset,$$

e se questa si moltiplica ancora per $x - \sqrt{dn} = \emptyset$, si ha la composta.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - a \\ \quad - \sqrt{cm} \\ \quad - \sqrt{dn} \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + a\sqrt{cm} \\ + a\sqrt{dn} \\ + \sqrt{cdmn} \end{array}\right\} x - a\sqrt{cdmn} = \emptyset$$

Se si moltiplica $y+\sqrt{ad}=o$ per $y+\sqrt{cf}=o$, si ha la composta

$$\left.\begin{array}{l} y^2+\sqrt{ad} \\ \quad +\sqrt{cf} \end{array}\right\} y+\sqrt{acdf}=o,$$

e se questa si moltiplica ancora per $y+\sqrt{af}=o$, si ha

$$\left.\begin{array}{l} y^3+\sqrt{ad} \\ \quad +\sqrt{cf} \\ \quad +\sqrt{af} \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l} +\sqrt{acdf} \\ +a\sqrt{df} \\ +f\sqrt{ac} \end{array}\right\} y+af\sqrt{cd}=o,$$

e così di altre, nelle quali si osserveranno le proprietà descritte (§§. 4, 5, 6, 7, 8).

12. Siccome nel comporre altre equazioni, usando quantità razionali, o sorde, s' incontrano sempre i medesimi risultamenti, così addurremo le seguenti regole generali per le equazioni di qualsivoglia grado prodotte dalla moltiplica di equazioni del primo grado.

1.° Allorchè i valori dell' incognita sono tutti positivi, o tutti negativi, l' equazione ha sempre tutti i suoi termini. Ma, se alcuni di questi valori sono positivi, ed altri negativi, può succedere, che manchi qualche termine nell' equazione composta.

2.° Nelle equazioni, che hanno tutti i loro termini, s' osserva, che il primo termine contiene la sola incognita elevata alla potestà indicata dal numero delle componenti.

3.° Il coefficiente del secondo termine contiene la somma di tutti i valori dell' incognita col segno mutato.

4.° Il coefficiente del terzo termine contiene la somma di tutti i prodotti di due in due d' essi valori col segno proprio.

5.° Il coefficiente del quarto termine contiene la somma dei prodotti di tre in tre col segno mutato.

6.° Il coefficiente del quinto termine contiene la somma dei prodotti di quattro in quattro d' essi valori col segno proprio, e così di mano in mano degli altri termini successivi.

7.° L' omogeneo è sempre il prodotto di tutti i valori col segno proprio, qualora nell' equazione forma un termine dispari, e col segno mutato, se rappresenta un termine pari.

8.° Ognorachè i termini di una proposta equazione sono alternamente positivi, e negativi, i valori dell' incognita sono positivi, e per contrario sono negativi essi valori, se tutti i segni sono positivi; e si dirà, che alcuni de' valori sono positivi, ed altri negativi, semprechè i segni dei termini sa-

ranno disposti con ordine perturbato, e che altrettanti sono i valori positivi, quante sono le mutazioni d'essi segni, ed altrettanti sono i valori negativi, quante sono le sequele de' segni simili. Per esempio nell'equazione $y^3 + 4y^2 - 6y - 30 = \emptyset$ esistono due valori negativi, poichè due sono le sequele dei segni simili dal primo al secondo termine, e dal terzo al quarto, e trovasi un valore positivo, poichè s'osserva la mutazione di segno dal secondo al terzo termine. Nell'equazione $x^5 - ax^4 - c^2 x^3 + c^3 x^2 + m^4 x - d^5 = \emptyset$ tre sono i valori positivi, poichè tre sono le mutazioni di segno, e due sono i valori negativi, perchè vi sono due sequele di segni simili.

9.° Qualora manca un qualche termine nell'equazione, si conchiude a dirittura, che alcuni valori dell'incognita sono positivi, ed altri negativi, e che la differenza fra essi, o fra i loro prodotti si riduce a zero. Affine poi d'individuare in questo caso il numero de' valori positivi, e quello de' negativi, si scrive l'asterisco, ossia la stelletta * preceduta dal segno ambiguo $\pm$ in vece

del termine mancante, e s'osserva ciò, che risulta dal supporre il segno positivo, e indi negativo: qualora in ambedue le supposizioni riescono identiche le conseguenze, cioè se s'ottiene lo stesso numero di valori positivi, e negativi, dire si dee, che tali sono i valori dell'incognita. L'equazione $y^3 - 109y + 420 = 0$ mancante del secondo termine si scrive così

$y^3 \pm * - 109y + 420 = 0$, indi, considerato l'asterisco preceduto dal segno $+$, si trova, che due sono i valori positivi, ed uno negativo, e considerando in seguito l'asterisco preceduto dal segno $-$, si trova, come prima, che due sono i valori positivi, ed uno negativo; epperò, essendo identiche le conseguenze, si conchiude, che tali sono i valori dell'equazione proposta.

13. Dal considerare il modo, con cui si producono le equazioni composte, si scorge facilmente la maniera di discomporle. A tal fine si formi un'equazione del primo grado, il cui primo termine sia l'incognita, e l'altro sia uno de' divisori dell'omogeneo preceduto dal segno più, o meno, secondo

che indica l'ordine de' segni nell' equazione proposta; indi si divida la composta per quella del primo grado: se in questa divisione s' otterrà un quoziente esatto, si dirà, che essa equazione del primo grado è una delle componenti. Si divida questo quoziente per un' altra equazione del primo grado formata, come sovra, e, se s'otterrà un altro quoziente esatto, si dirà, che quest' altra equazione dividente è pure una delle componenti, e così successivamente, dovendosi proseguire l' operazione, finchè s' arrivi ad avere un quoziente del primo grado; mediante le quali cose s'avranno le radici dell' equazione proposta.

Dell' equazione $x^2 \left.\begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix}\right\} x + ac = \emptyset$ i divisori dell' omogeneo sono 1, a, c, ac. Se l' equazione composta si dividerà per l' equazione del primo grado $x - a = \emptyset$, s' avrà di quoziente esatto $x - c = \emptyset$. Ma, se si dividerà per $x - 1 = \emptyset$, o per $x - ac = \emptyset$, più non sarà esatto il quoziente. Pertanto si dirà, che le due radici dell' equazione proposta sono $x - a = \emptyset$, $x - c = \emptyset$.

Dell' equazione

$$y^3 \left.\begin{array}{l} -a \\ -b \\ -c \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{l} +ab \\ +ac \\ +bc \end{array}\right\} y - abc = 0$$

i divisori dell' omogeneo sono 1, a, b, c, ab, ac, bc, abc; se questa equazione si dividerà per $y - c$, s' avrà di quoziente esatto $y^2 \left.\begin{array}{l} -a \\ -b \end{array}\right\} y + ab = 0$, e se questo si dividerà per $y - b = 0$, s' avrà di quoziente esatto $y - a = 0$, ma, se si tenterà la divisione per y meno un altro de' mentovati divisori dell' omogeneo, più non s' otterrà il quoziente esatto. E però si dirà, che le tre radici dell' equazione proposta sono $y - c = 0$, $y - b = 0$, $y - a = 0$.

Dell' equazione

$$z^4 \left.\begin{array}{l} -a \\ -b \\ +c \\ +d \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} +ab \\ -ac \\ -bc \\ -ad \\ -bd \\ +cd \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +abc \\ +abd \\ -acd \\ -bcd \end{array}\right\} z + abcd = 0$$

i divisori dell' omogeneo sono 1, a, b, c, d, ab, ac, bc, ad, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, $abcd$. Se questa equazione si dividerà per $z + d = 0$, s' avrà il quoziente esatto.

$$z^3 \left.\begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix}\right\} z^2 \left.\begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix}\right\} z + abc = 0.$$

Dividasi questa per $z - b$, si troverà il quoziente esatto $z^2 \left.\begin{matrix} -a \\ +c \end{matrix}\right\} z - ac = 0$, e col dividere quest'ultima equazione per $z + c = 0$, si ha il quoziente esatto $z - a = 0$.

Se si fosse tentata la divisione per $z - d = 0$, o per $z - c = 0$, o per $z + b = 0$, o per $z + a = 0$, o finalmente per z più, o meno qualchedun altro degli specificati divisori dell'omogeneo, più non si sarebbero ottenuti quozienti esatti. E però si dirà, che le quattro radici dell'equazione proposta sono $z - a = 0$, $z - b = 0$, $z + c = 0$, $z + d = 0$.

14. Se nell'equazione composta si sostituiranno in vece dell'incognita i suoi valori col segno proprio, tutti i termini scompariranno.

Le radici dell'equazione

$x^2 \left.\begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix}\right\} x + ac = 0$ essendo $x - a = 0$, ed $x - c = 0$, i valori dell'incognita sono $x = a$, $x = c$. Sostituiscasi in vece di x uno di questi due valori, e per

esempio c, l'equazione composta si troverà ridotta a quest' espressione $c^2 - ac - c^2 + ac = 0$, in cui tutti i termini si distruggono.

Le radici dell'equazione

$$\left.\begin{array}{l} z^3 - a \\ - b \\ + c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + ab \\ z^2 - ac \\ - bc \end{array}\right\} z + abc = 0$$

sono $z - a = 0$, $z - b = 0$, $z + c = 0$, e quindi i tre valori dell'incognita sono $z = a$, $z = b$, $z = -c$.

Se in vece di z si sostituirà uno di questi valori, e per esempio a, l'equazione composta si troverà ridotta a quest' espressione.

$$\begin{array}{l} a^3 - a^3 + a^2b + abc = 0 \\ - a^2b - a^2c \\ + a^2c - abc \end{array}$$

in cui tutti i termini si distruggono. Lo stesso succederà, se in vece dell'incognita si scriverà il suo valore negativo $-c$, giacchè in questo caso l'equazione composta sarà ridotta a quest' altra espressione

$$\begin{array}{l} -c^3 - ac^2 - abc + abc = 0 \\ - bc^2 + ac^2 \\ + c^3 + bc^2 \end{array}$$

in cui i termini si distruggono tutti, e così di altri casi.

15. Prima di esaminare le equazioni composte da quelle semplici, che sono di grado superiore al primo (§. 3 n. 2), d'uopo è considerare la genesi, e la natura di queste componenti.

L'equazione semplice di secondo grado $x^2 - a^2 = 0$ è prodotta dalla moltiplica di $x - a = 0$ per $x + a = 0$; ma l'equazione $x^2 + a^2 = 0$ ha le due radici immaginarie, stante che dall'equazione $x^2 = - a^2$ non si può estrarre la radice quadrata, essendo negativa la quantità a^2.

L'equazione semplice del terzo grado $y^3 - a^3 = 0$ è prodotta dalla moltiplica di $y - a = 0$ per $y^2 + ay + a^2 = 0$, le cui radici sono immaginarie, stante che il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine è minore dell'omogeneo. L'equazione $y^3 + a^3 = 0$ è prodotta dalla moltiplica di $y + a = 0$ per $y^2 - ay + a^2 = 0$, la quale ha pure le sue radici immaginarie, e però se esse equazioni semplici di terzo grado hanno una sola radice reale, sarà positiva la prima, e negativa la seconda.

L' equazione semplice del quarto grado $z^4 - a^4 = ø$ è prodotta dalla moltiplica delle due equazioni $z - a = ø$, $z + a = ø$ per $z^2 + a^2 = ø$, le cui radici sono immaginarie; onde due sole sono le radici reali; ma l' equazione $z^4 + a^4 = ø$ ha le quattro radici immaginarie, giacchè non si può estrarre la radice quadrata dalla quantità negativa a^4.

L' equazione semplice del quinto grado $x^5 - a^5 = ø$ è prodotta dall' equazione $x - a = ø$ moltiplicata per quest' altra del quarto grado $x^4 + ax^3 + a^2 x^2 + a^3 x + a^4 = ø$, la quale, come vedremo nel capo terzo, ha le sue quattro radici immaginarie. L' equazione $x^5 + a^5 = ø$ è prodotta dall' equazione $x + a = ø$ per $x^4 - ax^3 + a^2 x^2 - a^3 x - a^4 = ø$, la quale ha pure le quattro radici immaginarie. E però ciascheduna di queste equazioni di quinto grado ha una sola radice reale, positiva la prima, e negativa la seconda.

L' equazione $y^6 - c^6 = ø$ è prodotta dalla moltiplica delle due equazioni $y - c = ø$, $y + c = ø$ per $y^4 + c^2 y^2 + c^4 = ø$, le di cui radici essendo tutte e quattro

immaginarie, due sole reali ne contiene l' equazione proposta; ma l' equazione $y^6 + c^6 = 0$ ha tutte le sei radici immaginarie.

16. Generalmente si dirà, che un' equazione semplice di grado qualsivoglia $z^n \pm a^n = 0$ avrà una radice positiva $z - a = 0$, ed un' altra negativa $z + a = 0$, ognorachè n sarà un numero pari, e l' omogeneo a^n sarà preceduto dal segno $-$; ma saranno immaginarie tutte le sue radici, se l' omogeneo sarà preceduto dal segno $+$.

Qualora poi n sarà un numero impari, allora l' equazione avrà sempre una radice reale, e questa sarà positiva, se l' omogeneo sarà preceduto dal segno $-$, e sarà negativa essa radice, se l' omogeneo sarà preceduto dal segno $+$. Tutte le altre radici dell' equazione saranno poi sempre immaginarie.

Inoltre convien notare, che, qualunque volta la quantità cognita dell' equazione componente sarà una potestà perfetta indicata dall' esponente dell' incognita, come $x^2 - a^2 = 0$, $y^5 - c^5 = 0$ ec., il valore dell' incognita riuscirà sempre razionale; ma, se la cognita non sarà

potestà perfetta, come $z^3 - abc = 0$, $z^4 - a^3 d = 0$ ec., il valore dell' incognita riuscirà sordo, ancorchè reale.

17. La moltiplica di quelle equazioni semplici, le quali, essendo tutte dello stesso grado, sono però di grado superiore al primo (§. 3 n. 2), produce quella specie d' equazioni, che si denominano *derivative*.

Se si moltiplicano le equazioni di secondo grado $x^2 - a^2 = 0$, $x^2 - c^2 = 0$, si ha l' equazione derivativa

$$x^4 \left.\begin{matrix} -a^2 \\ -c^2 \end{matrix}\right\} x^2 + a^2 c^2 = 0,$$ e se questa si moltiplica per un' altra pure di secondo grado $x^2 - d^2 = 0$, si produce quest' altra equazione derivativa

$$x^6 \left.\begin{matrix} -a^2 \\ -c^2 \\ -d^2 \end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix} +a^2 c^2 \\ +a^2 d^2 \\ +c^2 d^2 \end{matrix}\right\} x^2 - a^2 c^2 d^2 = 0.$$

Se si moltiplicano le due equazioni di terzo grado $y^3 + a^3 = 0$, $y^3 + c^3 = 0$, si ha l' equazione derivativa

$$y^6 \left.\begin{matrix} +a^3 \\ +c^3 \end{matrix}\right\} y^3 + a^3 c^3 = 0$$

col moltiplicare quest' equazione per un' altra di terzo grado $y^3 + d^3 = 0$, si ha l' equazione derivativa

$$\left.\begin{array}{l} y^9 + a^3 \\ \quad\; + c^3 \\ \quad\; + d^3 \end{array}\right\} y^6 \left\{\begin{array}{l} + a^3c^3 \\ + a^3d^3 \\ + c^3d^3 \end{array}\right\} y^3 + a^3\, c^3\, d^3 = 0.$$

Se si moltiplicano le due equazioni di quarto grado $z^4 - a^4 = 0$, $z^4 + c^4 = 0$, si ha l'equazione derivativa

$$\left.\begin{array}{l} z^8 - a^4 \\ \quad\; + c^4 \end{array}\right\} z^4 - a^4\, c^4 = 0$$

e moltiplicando ancora per l'equazione di quarto grado $z^4 - d^4 = 0$, si ha quest' altra equazione derivativa.

$$\left.\begin{array}{l} z^{12} - a^4 \\ \quad\;\; + c^4 \\ \quad\;\; - d^4 \end{array}\right\} z^8 \left\{\begin{array}{l} - a^4c^4 \\ + a^4d^4 \\ - c^4d^4 \end{array}\right\} z^4 + a^4\, c^4\, d^4 = 0$$

e così di altre.

18. Allorchè si considera più particolarmente la forma delle equazioni derivative, si trova:

1.° Che gli esponenti dell' incognita formano una progressione aritmetica discendente, il cui denominatore è maggiore dell' unità.

2.° Che in queste equazioni mancano que' termini, in cui l'esponente dell' incognita è compreso fra due termini della progressione.

3.° Che il denominatore della progressione esprime il grado, cui è elevata

l' incognita nelle equazioni componenti.

4.° Che il numero delle equazioni componenti è espresso dal quoziente, che s' ottiene dividendo l' esponente massimo dell' equazione composta pel denominatore della progressione.

5.° Che le proprietà delle equazioni derivative sono per rapporto alle loro componenti le medesime, che si sono dimostrate (§. 12) per riguardo alle componenti del primo grado, e così dell' equazione derivativa
$x^{15} - a^3x^{12} + c^6x^9 - d^9x^6 + f^{12}x^3 - k^{15} = 0$, il coefficiente a^3 di x^{12} contiene la somma di tutte le cognite delle componenti col segno mutato. Il coefficiente c^6 di x^9 contiene la somma di tutti i prodotti di due in due d' esse cognite col segno proprio. Il coefficiente d^9 di x^6 contiene la somma dei prodotti di tre in tre d' esse cognite col segno mutato. Il coefficiente f^{12} di x^3 contiene la somma dei prodotti di quattro in quattro col segno proprio, e l' omogeneo k^{15} è prodotto dalla moltiplica di tutte esse cognite col segno mutato.

Lo stesso dire si dee di qualsivoglia altra derivativa.

19. Affine di riscontrare più particolarmente la teoria dell' antecedente paragrafo, si consideri l' equazione derivativa

$$x^4 \left.\begin{matrix} - a^2 \\ - c^2 \end{matrix}\right\} x^2 + a^2c^2 = \emptyset ,$$

si vede tosto, che gli esponenti dell' incognita formano la progressione aritmetica discendente ÷ 4. 2. ∅, il cui denominatore è 2, che l' equazione è prodotta da due semplici del secondo grado, e che, attesa l' alternativa de' segni, i valori di x^2 sono ambidue positivi, onde il suo coefficiente contiene la somma dei due valori col segno mutato, e l' omogeneo è il prodotto degli stessi due valori col segno proprio. In oltre s' osserva, che mancano i termini di x^3, x, i cui esponenti sono frapposti ai termini 4, 2, e 2, ∅ della progressione.

Se poi si suppone $a^2 = c^2$, l' equazione composta diventa la potestà perfetta $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = \emptyset$, la cui radice è $x^2 - a^2 = \emptyset$.

Nell' equazione derivativa

$$y^6 \left.\begin{matrix} - a^3 \\ + b^3 \end{matrix}\right\} y^3 - a^3b^3 = \emptyset ,$$

gli esponenti dell' incognita formano la

progressione aritmetica discendente ÷ 6. 3. 0, il cui denominatore è 3; siccome, dividendo 6 per 3, si ha 2 di quoziente, si dirà, che l'equazione è prodotta da due semplici del terzo grado. In oltre s' osserva, che nella equazione proposta mancano i termini di y^5, y^4, y^2, y, essendo gli esponenti de' due primi fra i termini 6, 3 della progressione, e gli esponenti dei due ultimi fra i termini 3, 0 d' essa progressione. Siccome l' ordine de' segni indica, che de' valori dell' incognita y^3 uno è positivo, e l' altro negativo, così la differenza d' essi due valori forma il coefficiente di y^3 col segno mutato, e l' omogeneo è il prodotto de' due valori col segno proprio.

Se si suppone $a^3 = b^3$, il termine, in cui trovasi y^3 scomparisce, e l' equazione composta diventa $y^6 - a^6 = 0$.

Nell' equazione derivativa

$$z^6 \left.\begin{matrix} - a^2 \\ - b^2 \\ - c^2 \end{matrix}\right\} z^4 \left.\begin{matrix} + a^2b^2 \\ + a^2c^2 \\ + b^2c^2 \end{matrix}\right\} z^2 - a^2 b^2 c^2 = 0,$$

la progressione aritmetica formata dagli esponenti è ÷ 6. 4. 2. 0, il cui denominatore è 2, e dividendo 6 per 2, si

ha 3 di quoziente; perciò si dirà, che l'equazione è prodotta da tre semplici del secondo grado; ravvisandosi in essa mancanti i termini di z^5, z^3, z, i cui denominatori sono frapposti ai termini 6, 4, 4, 2, 2, ø della progressione. Considerando poi i coefficienti dei termini esistenti nella proposta equazione, si ravvisano per rapporto all' incognita z^2 le proprietà additate (§. 12, 18 n. 1.).

Nell' equazione derivativa

$$x^9 \left.\begin{matrix} -a^3 \\ +c^3 \\ +d^3 \end{matrix}\right\} x^6 \left.\begin{matrix} -a^3c^3 \\ -a^3d^3 \\ +c^3d^3 \end{matrix}\right\} x^3 - a^3 c^3 d^3 = ø,$$

gli esponenti dell' incognita formano la progressione decrescente ÷ 9. 6. 3. ø, il cui denominatore è 3; siccome poi, dividendo 9 per tre, si ha 3 di quoziente, si dirà, che quest' equazione è prodotta da tre semplici del terzo grado. In quest' equazione si vedono pure mancanti i termini dell' incognita, i cui esponenti sono frapposti fra i termini della progressione aritmetica. Se si supporrà $a^3 = c^3 + d^3$, il termine, in cui trovasi x^6 scomparirà, e scomparirà pure l' altro termine, in cui trovasi x^3, se sarà $a^3 c^3 + a^3 d^3 = c^3 d^3$.

Nell' equazione derivativa

$$\left.\begin{matrix} y^{12} + a^4 \\ + b^4 \\ + c^4 \end{matrix}\right\} y^8 \left.\begin{matrix} + a^4 b^4 \\ + a^4 c^4 \\ + b^4 c^4 \end{matrix}\right\} y^4 + a^4 b^4 c^4 = 0$$

gli esponenti dell' incognita formano la progressione ÷ 12. 8. 4. 0, il cui denominatore è 4; e poichè, dividendo l' esponente 12 per 4, si ha 3 di quoziente, si dirà, che quest' equazione è prodotta da tre semplici del quarto grado; osservandosi pure in essa le altre proprietà divisate nelle precedenti. Se si supporrà $a^4 = b^4 = c^4$, l' equazione proposta riuscirà una potestà perfetta.
$y^{12} + 3\,a^4 y^8 + 3\,a^8 y^4 + a^{12} = 0$, la cui radice cubica è $y^4 + a^4 = 0$.

20. Conoscendo il modo, con cui si producono le equazioni derivative, si scorge facilmente la maniera di discomporle (§. 13), bastando per ciò formare un' equazione semplice, il cui primo termine sia l' incognita elevata al grado indicato dal denominatore della progressione, e l' altro termine sia uno de' divisori dell' omogeneo preceduto dal conveniente segno. Se nel dividere l'equazione composta per la divisata semplice s' otterrà un quoziente esatto, si dirà,

che essa semplice è una delle componenti.

Se l' equazione

$$\left.\begin{array}{l} x^9 - a^3 \\ \quad + c^3 \\ \quad + d^3 \end{array}\right\} x^6 \left.\begin{array}{l} - a^3c^3 \\ - a^3d^3 \\ + c^3d^3 \end{array}\right\} x^3 - a^3c^3d^3 = 0,$$

in cui i divisori dell' omogeneo sono 1, a^3, c^3, d^3, a^3c^3, a^3d^3, c^3d^3, $a^3c^3d^3$, si dividerà per $x^3 - a^3 = 0$, s' avrà di quoziente esatto

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + c^3 \\ \quad + d^3 \end{array}\right\} x^3 + c^3d^3 = 0,$$ e se questa si dividerà per $x^3 + c^3 = 0$, s' avrà il quoziente esatto $x^3 + d^3 = 0$: si dirà adunque, che le componenti dell' equazione proposta sono $x^3 - a^3 = 0$, $x^3 + c^3 = 0$, $x^3 + d^3 = 0$.

21. Se nell' equazione proposta si sostituirà in vece di x^3 uno de' valori ritrovati dell' incognita, e per esempio a^3, tutti i termini dell' equazione scompariranno, come s' osserva in questa espressione

$$\begin{array}{llll} a^9 - & a^9 & - a^6c^3 & - a^3c^3d^3 = 0. \\ & + a^6c^3 & - a^6d^3 & \\ & + a^6d^3 & + a^3c^3d^3 & \end{array}$$

22. Le equazioni prodotte da componenti di diverso grado (§. 3 n. 3) si

rappresentano sotto altre forme, ed hanno delle proprietà particolari, le quali dipendono dal numero delle componenti. Noi esamineremo i due seguenti casi, cioè:

1.° Qualora l'equazione composta è prodotta dalla moltiplica di due sole di qualunque grado esse sieno.

2.° Quando le componenti sono in numero di tre. Da quanto si dirà in quest'esame sarà facile di estendere la teoria a quelle altre equazioni, che sono prodotte da un maggior numero di componenti.

23. Cominciando dall'esame del primo caso (§. 22), si osserva, che, se si moltiplica $x^2 - a^2 = \emptyset$ per $x - c = \emptyset$, si ha l'equazione $x^3 - cx^2 - a^2x + a^2c = \emptyset$ di quattro termini, in cui ciascheduno de' due di mezzo è prodotto dalla moltiplica dell' incognita di una delle componenti per la cognita dell'altra, e che il segno, il quale precede ognuno d'essi due termini, è lo stesso, che s'appartiene alla quantità cognita; di maniera che l'incognita x^2 del secondo termine meno il coefficiente a^2 del terzo termine formano una delle equazioni componenti,

e l' incognita x del terzo termine meno il coefficiente c del secondo termine formano l'altra componente; osservandosi pure, che l'omogeneo è prodotto dalla moltiplica delle due cognite col segno proprio.

Se le cognite nelle componenti avranno il segno più, l'equazione composta sarà $x^3 + cx^2 + a^2 x + a^2 c = \emptyset$, di maniera che, quanto s'è detto del segno meno, si dee applicare precisamente al segno $+$; e se una delle cognite sarà preceduta dal segno $+$, e l'altra dal segno $-$, i due termini di mezzo dell'equazione composta avranno pure il segno corrispondente a quello, che ha la cognita nella componente, e l'omogeneo avrà il segno proprio.

Le medesime proprietà si ravvisano pure nelle seguenti equazioni, alcune delle quali sono composte da due di grado superiore al primo, mentre altre sono prodotte da una del primo grado, e da un' altra di grado superiore.

Se si moltiplica $y^3 - a^3 = \emptyset$ per $y + c = \emptyset$, si ha $y^4 + cy^3 - a^3 y - a^3 c = \emptyset$.

Se si moltiplica $z^3 + a^3 = \emptyset$ per $z^2 - c^2 = \emptyset$, si ha $z^5 - c^2 z^3 + a^3 z^2 - a^3 c^2 = \emptyset$.

Se si moltiplica $x^4 + a^4 = 0$ per $x + c = 0$, si ha $x^5 + cx^4 + a^4x + a^4c = 0$.

Se si moltiplica $y^5 - a^5 = 0$ per $y - c = 0$, si ha $y^6 - cy^5 - a^5y + a^5c = 0$.

Se si moltiplica $z^4 - a^4 = 0$ per $z^2 + c^2 = 0$, si ha $z^6 + c^2z^4 - a^4z^2 - a^4c^2 = 0$;

Se si moltiplica $y^4 - a^4 = 0$ per $y^3 - d^3 = 0$, si ha $y^7 - d^3y^4 - a^4y^3 + a^4d^3 = 0$, e così di altre, qualunque sia il grado della composta, e quello delle componenti.

24. Da quanto sovra si è accennato si deduce, che le equazioni di quattro termini prodotte da equazioni semplici di grado diverso hanno le seguenti proprietà:

1.° I segni sono o tutti positivi, o alternamente positivi, e negativi, o positivi i due primi, e negativi gli altri due, o finalmente sono positivi i due estremi, e negativi i due di mezzo.

2.° Che l' incognita del secondo termine più, o meno il coefficiente del terzo formano la componente più elevata, e che l'incognita del terzo termine più, o meno il coefficiente del secondo somministrano la componente meno elevata.

3.° Che il prodotto d' essi due coefficienti forma sempre l' omogeneo.

4.° Che venendo proposta una qualche equazione, in cui s' incontrino le divisate proprietà, sarà facile risolverla nelle sue componenti.

25. Qualora le equazioni componenti sono in numero di tre (§. 22 n. 2), l'equazione composta ha otto termini, o solamente sette. Nel primo caso la composta è sempre prodotta da equazioni semplici di grado superiore al primo; ma nel secondo caso essa composta è prodotta, o da equazioni di grado superiore al primo, o dall' incontrarsene fra le componenti una del primo grado, e cominciando dalle equazioni appartenenti al primo caso.

Si moltiplichino le equazioni semplici $x^4 - a^4 = \emptyset$, $x^3 + c^3 = \emptyset$, $x^2 - d^2 = \emptyset$, s' avrà la composta $x^9 - d^2 x^7 + c^3 x^6 - a^4 x^5 - c^3 d^2 x^4 + a^4 d^2 x^3 - a^4 c^3 x^2 + a^4 c^3 d^2 = \emptyset$, in cui s' osserva:

1.° Che il coefficiente del termine $d^2 x^7$ è la cognita, che s' appartiene alla componente meno elevata.

2.° Che il coefficiente del termine $c^3 x^6$ è la cognita della componente mezzana.

3.° Che il coefficiente del termine $a^4 x^5$ è la cognita della componente più elevata.

4.° Che nel quinto termine si ha l' incognita la più elevata delle equazioni componenti, nel sesto termine si ha l'incognita della componente mezzana, e nel settimo termine si ha l' incognita meno elevata.

5.° Che ciascheduna cognita è preceduta dal segno, che ha nell' equazione componente.

6. Che, se si moltiplicano i tre coefficienti $- d^2$, $+ c^3$, $- a^4$, fra di loro, si ha un prodotto uguale all' omogeneo col segno proprio.

Se si moltiplicano le equazioni $z^6 - a^6 = 0$, $z^5 - c^5 = 0$, $z^3 - d^3 = 0$, si ha la composta $z^{14} - d^3 z^{11} - c^5 z^9 - a^6 z^8 + c^5 d^3 z^6 + a^6 d^3 z^5 + a^6 c^5 z^3 - a^6 c^5 d^3 = 0$, in cui si ricavano tutte le proprietà dell' altra equazione di nono grado.

26. Siccome le medesime proprietà s' incontrano pure in tutte le composte, le quali, essendo prodotte da tre semplici, hanno otto termini, così si dirà per regola generale, che, essendo proposta un' equazione di qualsivoglia grado,

la quale abbia otto termini, se in essa s' incontreranno le proprietà divisate nell' antecedente paragrafo, si risolverà facilmente nelle tre componenti nel modo, che segue.

Si prenderà il coefficiente del secondo termine per la cognita dell' equazione più depressa, il coefficiente del terzo termine somministrerà la cognita per la componente mezzana, ed il coefficiente del quarto termine sarà la cognita della componente più elevata.

Le incognite per le equazioni componenti si prenderanno nel quinto, sesto, e settimo termine, e queste si uniranno colle cognite precedute dal segno proprio.

Operando come sovra, si trova, che della prima equazione proposta (§.25) le componenti sono $x^4 - a^4 = \emptyset$, $x^3 + c^3 = \emptyset$, $x^2 - d^2 = \emptyset$, che della seconda equazione in detto paragrafo addotta le componenti sono $z^6 - a^6 = \emptyset$, $z^5 - c^5 = \emptyset$, $z^3 - d^3 = \emptyset$.

27. Esaminiamo il secondo caso (§.25), considerando primieramente le equazioni, le quali, essendo composte da tre semplici di grado superiore al primo, hanno solamente sette termini.

Si moltiplichino le equazioni $y^5 + a^5 = \emptyset$, $y^3 - c^3 = \emptyset$, $y^2 + d^2 = \emptyset$, e s'avrà la composta di sette termini, fra i quali quello di mezzo è duplicato.

$$y^{10} + d^2y^8 - c^3y^7 + a^5y^5 + a^5d^2y^3 - a^5c^3y^2$$
$$- c^3d^2y^5.$$
$$- a^5c^3d^2 = \emptyset.$$

Se si moltiplicano $x^8 - a^8 = \emptyset$, $x^6 - c^6 = \emptyset$, $x^2 - d^2 = \emptyset$, si ha la composta di sette termini, fra i quali quello di mezzo è pure duplicato $x^{16} - d^2x^{14} - c^6x^{10}$
$$- a^8x^8 + a^8d^2x^6 + a^8c^6x^2 - a^8c^6d^2 = \emptyset.$$
$$+ c^6d^2x^8.$$

La medesima cosa succederà, qualvolta, moltiplicando le incognite meno elevate di due componenti, s'avrà un prodotto uguale all'incognita più elevata della terza componente, ed è questo il motivo, per cui l'equazione prodotta da tre componenti di grado superiore al primo riesce solamente di sette termini, essendo composto il coefficiente del quarto termine.

Considerando ancora più particolarmente queste equazioni, si trova:

1.° Che nel quarto, quinto, e sesto termine si hanno le incognite delle componenti.

2.° Che il coefficiente del secondo termine somministra la cognita col segno proprio per la componente meno elevata; che il coefficiente del terzo termine somministra pure la cognita col segno proprio per la componente mezzana, e se l' omogeneo si dividerà pel prodotto d'essi due coefficienti, s' avrà nel quoziente la cognita col segno proprio per la componente più elevata; avvegnachè l' omogeneo è sempre il prodotto di tutte le cognite delle componenti.

28. Ciò che detto è delle equazioni di sette termini nate dalla moltiplica di tre equazioni di grado superiore al primo, fra le quali il prodotto delle due incognite minori nelle componenti uguaglia la maggiore, dir si dee pure di quelle equazioni prodotte da tre semplici pure di grado diverso, fra le quali se ne trova una del primo grado.

Se si moltiplicano le equazioni semplici $x^3 - b^3 = \emptyset$, $x^2 - a^2 = \emptyset$, $x - c = \emptyset$, si ha la composta di sette termini, fra i quali quello di mezzo è duplicato.

$$x^6 - cx^5 - a^2x^4 + a^2cx^3 + b^3cx^2 + a^2b^3x$$
$$- b^3x^3.$$
$$- a^2b^3c = \emptyset.$$

Se si moltiplicano le tre equazioni $y^4 + a^4 = 0$, $y^3 + c^3 = 0$, $y - d = 0$, si ha pure la composta di sette termini, essendo eziandio duplicato quello di mezzo,

$$y^8 - dy^7 + c^3 y^5 + a^4 y^4 - a^4 dy^3 + a^4 c^3 y - a^4 c^3 d = 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - c^3 dy^4$$

Siccome nell' esaminare queste equazioni si trovano tutte le proprietà descritte (§ 27), così, per averne le componenti, basterà usare la regola data nel mentovato paragrafo.

29. Occorrendo poi, che fra le componenti di grado diverso se ne dia una di primo grado, e che il prodotto delle due incognite meno elevate riesca minore dell' incognita più elevata nella terza componente, allora la composta avrà otto termini, le cui proprietà varieranno qualche poco da quelle registrate (§ 26, 27).

Se le equazioni semplici $z^5 - a^5 = 0$, $z^3 - c^3 = 0$, $z + d = 0$ si moltiplicheranno fra loro, s' avrà la composta di otto termini $z^9 + dz^8 - c^3 z^6 - c^3 dz^5 - a^5 z^4 - a^5 dz^3 + a^5 c^3 z + a^5 c^3 d = 0$, nella quale s' osserva, che i coefficienti del secondo, terzo, e quinto termine somministrano le cognite per le componenti col segno

proprio, e che le incognite per esse componenti sono nel quarto, sesto, e settimo termine, l' omogeneo continua ad essere il prodotto di tutte le cognite delle componenti col segno proprio.

Siccome le stesse proprietà si danno in qualsivoglia altra equazione come sovra prodotta, così le fatte osservazioni bastano per risolvere le equazioni di queste specie.

30. Discorrendo finalmente delle equazioni prodotte da quelle componenti, fra le quali ve ne sono alcune dello stesso grado (§ 3 n. 4) s' osserva, che tali equazioni così composte partecipano delle proprietà delle altre prodotte nelle tre prime maniere : ma perchè intorno a queste produzioni si può fare un gran numero di combinazioni diverse, e che riuscirebbe troppo lunga, e soverchia l' individuazione di queste cose, così nella regola generale, che si darà al capo 4.º per risolvere le equazioni, si faranno notare le riflessioni, che servono a trovare più facilmente tutto quanto ricercasi in somiglianti equazioni.

31. Affine poi di conoscere, se le equazioni di primo grado hanno parte fra le

componenti dell' equazione proposta, si faranno le seguenti osservazioni:

1.ª Se in qualche termine dell'equazione proposta s' incontrerà l' incognita lineare, saremo certi, che fra le componenti ve n' è almeno una di primo grado.

2.ª Se nell' equazione proposta l' incognita meno elevata sarà del secondo grado, si ha luogo a sospettare, che le equazioni di primo grado non abbiano parte nella produzione dell' equazione proposta; e se l' incognita meno elevata sarà del terzo grado, crescerà il fondamento a sospettare, che le equazioni semplici di primo, e di secondo grado siano escluse dalla composizione dell' equazione proposta. Dissi sospettare, poichè la mancanza dell' incognita lineare, e della quadrata può anche nascere da valori positivi, e negativi, che distruggono essi termini mancanti (§. 12. n. 9).

3.ª Sarà poi indizio certo, che le componenti sono di grado superiore al primo, ognivoltachè, essendo l' equazione composta libera dai radicali, si troverà, che i valori dell' incognita sono sordi.

CAPO II.

Del modo di trasformare le Equazioni.

32. Dicesi trasformare l' equazione, allorchè questa si muta in un' altra, in cui i valori dell' incognita hanno una relazione cognita con quelli della proposta, di maniera che, venendo a conoscere gli uni, con tutta facilità si determinano poi gli altri.

Le equazioni si trasformano in cinque maniere, cioè:

1.° Per mezzo di semplici sostituzioni.

2.° Per mezzo della somma.

3.° Per mezzo della sottrazione.

4.° Per mezzo della moltiplica.

5.° Per mezzo della divisione.

33. Per trasformare un' equazione nella prima maniera (§. 32) è necessario, ch' essa sia derivativa, come l' equazione $x^4 - a^2 x^2 + c^4 = \varnothing$, l' equazione $x^6 - a^2 x^4 + c^4 x^2 + d^3 f^3 = \varnothing$, l' equazione $y^9 + a^3 y^6 - a^2 c^4 y^3 - m^5 n^4 = \varnothing$, l'equazione $z^{16} - a^4 z^{12} - c^6 d^2 z^8 + d^{12} z^4 + m^{10} n^6 = \varnothing$, ec.

Tutte queste equazioni si trasformano col supporre, che l'incognita elevata al grado indicato dal denominatore della progressione sia uguale ad un' altra incognita lineare, e sostituendo questa seconda incognita in vece dell' altra, s' ottiene l' equazione trasformata. Per trasformare l' equazione $x^4 - a^2 x^2 + c^4 = 0$, si suppone $x^2 = y$, e sostituendo y in vece di x^2, e y^2 in vece di x^4, si ha $y^2 - a^2 y + c^4 = 0$ per l' equazione trasformata, nella quale, dopo che si sarà trovato il valore di y, secondo che s' insegnerà nel Capo 4.°, si sostituirà poi nell' equazione $x^2 = y$ per avere il valore lineare di $x = \sqrt{y}$.

Per trasformare l'equazione $y^9 + a^3 y^6 - a^2 c^4 y^3 - m^5 n^4 = 0$, si supporrà $y^3 = x$, e sostituendo x in vece di y^3, x^2 in vece di y^6, x^3 in vece di y^9, s' avrà $x^3 + a^3 x^2 - a^2 c^4 x - m^5 n^4 = 0$ per l' equazione trasformata, dalla quale si ricaverà il valore di x, e questo si sostituirà poi nell'equazione $y^3 = x$ per avere quello di $y = \sqrt[3]{x}$.

Per trasformare l'equazione $z^{16} - a^4 z^{12} - c^6 d^2 z^8 + d^{12} z^4 + m^{10} n^6 = 0$, si supporrà $z^4 = x$, e questo, essendo sosti-

tuito nella proposta equazione, somministrerà $x^4 - a^4 x^3 - c^6 d^2 x^2 + d^{12} x + m^{10} n^6 = 0$ per l'equazione trasformata, da cui si caverà il valore di x, e questo si sostituirà nell'equazione $z^4 = x$ per avere quello di $z = \sqrt[4]{x}$.

34. Si trasformano le equazioni per mezzo della somma (§. 32. n. 2) collo scrivere l'incognita della proposta equazione, più la quantità, di cui si vuol accrescere. Questo binomio si uguaglia poi a un'altra incognita, indi si fa passare la quantità aggiunta nell'altro membro, e con questo si fanno poi le debite sostituzioni, e correggendo nel tempo stesso l'espressione, s'ottiene l'equazione trasformata.

Debbasi trasformare l'equazione $x^2 + 2x - 15 = 0$ per mezzo della somma, vale a dire, che i valori della trasformata sieno maggiori verbigrazia di 10 unità della proposta, si farà $x + 10 = y$; onde $x = y - 10$, e sostituendo in vece di x questo suo valore, s'avrà

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 - 20y + 100 \\ +\ 2x &= \ldots + \ \ 2y - \ \ 20 \\ -\ 15 &= \ldots\ldots\ldots - \ \ 15 \end{aligned}$$

e corretta l'espressione, s'avrà $y^2 - 18y$

$+ 65 = 0$ per l'equazione trasformata, dalla quale si ricaveranno poi i valori di y, e questi si sostituiranno nell' equazione $x = y - 10$ per avere quelli di x.

Sia proposta l'equazione $z^3 + 11z^2 + 38z + 40 = 0$ da trasformarsi per mezzo della somma, coll' accrescere le radici per esempio di 8 unità: si faccia $z + 8 = x$, sarà $z = x - 8$, e sostituito questo valore nella proposta equazione, s'avrà $z^3 = x^3 - 24x^2 + 192x - 512$

$+ 11z^2 = \ldots + 11x^2 - 176x + 704$

$+ 38z = \ldots\ldots\ldots\ldots + 38x - 304$

$+ 40 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 40$

e correggendo le espressioni, sarà $x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0$. Dopo, che da quest' equazione si saranno ricavati i valori di x, si sostituiranno nell' equazione $z = x - 8$ per avere quelli di z.

Serve questa trasformazione per avere un' equazione, in cui tutti i valori sieno positivi, quando nella proposta non sono tali, accrescendo essi valori a segno tale, che l'aumento superi il maggior valore negativo della proposta equazione, col qual mezzo si viene poi a conoscere, se nella proposta equazione vi sono delle immaginarie.

35. Si trasformano in terzo luogo le equazioni per mezzo della sottrazione (§. 32 n. 3), o della somma, allorchè si vuol fare scomparire qualche termine da una proposta equazione.

Per far sparire il secondo termine da una equazione, basta dividere il coefficiente d' esso secondo termine pel massimo esponente dell' incognita, e scrivendo l' incognita, e questo quoziente collo stesso segno del coefficiente, si farà uguale ad un' altra incognita; dopo del che, trasportando il quoziente nell' altro membro, si faranno le solite sostituzioni. Per esempio debbasi fare sparire il secondo termine dall' equazione $x^2 - 10x + 21 = 0$, si dividerà il coefficiente -10 pel massimo esponente 2 dell' incognita, e s' avrà -5 di quoziente, facciasi $x - 5 = y$, e trasportando, sarà $x = y + 5$; indi in vece di x^2 si sostituisca il quadrato di $y + 5$, ed in vece di x il valore $y + 5$, e s' avrà

$$x^2 = y^2 + 10y + 25$$
$$-10x = \ldots - 10y - 50$$
$$+ 21 = \ldots\ldots\ldots\ldots + 21,$$

e correggendo l' espressione, sarà $y^2 - 4 = 0$ l' equazione trasformata, in cui manca il se-

condo termine. Allorchè si sarà ritrovato il valore di y, si sostituirà poi nell' equazione $x = y + 5$ per avere quello di x.

Debbasi far sparire il secondo termine dall' equazione $z^3 + 12z^2 - 40z - 50 = 0$. Si divida 12 per 3 massimo esponente, e s' avrà $+ 4$ di quoziente, epperò si farà $z + 4 = x$, e trasportando, sarà $z = x - 4$, e fatte le debite sostituzioni, s' avrà

$$\begin{aligned} z^3 &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \\ + 12z^2 &= \ldots + 12x^2 - 96x + 192 \\ - 40z &= \ldots\ldots\ldots - 40x + 160 \\ - 50 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 50 \end{aligned}$$

e correggendo l' espressione, sarà $x^3 - 88x + 238 = 0$, in cui manca il secondo termine.

Debbasi trasformare la seguente equazione, facendo sparire il secondo termine, $x^4 - ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = 0$; si divida $-a$ per 4, e sarà $-\frac{a}{4}$, si faccia $x - \frac{a}{4} = y$, e trasportando, sarà $x = y + \frac{a}{4}$, e fatte le sostituzioni, si avrà

$$\begin{array}{rcl} x^4 &=& y^4 + ay^3 + \frac{3a^2y^2}{8} + \frac{a^3y}{16} + \frac{a^4}{256} \\ -\,ax^3 &=& \ldots - ay^3 - \frac{3a^2y^2}{4} - \frac{3a^3y}{16} - \frac{a^4}{64} \\ +\,6a^2x^2 &=& \ldots\ldots + 6a^2y^2 + \frac{6a^3y}{2} + \frac{6a^4}{16} \\ -\,4a^3x &=& \ldots\ldots\ldots\ldots - 4a^3y - a^4 \\ +\,a^4 &=& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a^4 \end{array}$$

e correggendo l' espressione, sarà

$y^4 + \frac{45a^2y^2}{8} - \frac{9a^3y}{8} + \frac{93a^4}{256} = \varnothing$, in cui più non compare il secondo termine.

Se poi per mezzo della somma, o della sottrazione si vorrà trasformare un' equazione, facendo sparire il terzo, il quarto ec. termine, sarà necessario di risolvere un' equazione di secondo grado per far sparire il terzo termine, di risolvere un' equazione del terzo grado per far sparire il quarto, di risolverne una del quinto per far sparire il sesto termine, e così di mano in mano, dovendosi poi sempre risolvere un' equazione del grado indicato dalla massima potestà dell' incognita, se si vorrà far sparire l' omogeneo.

36. Si dee quì osservare, che se nel levare il secondo termine dalla equazione

proposta si trova, che nella trasformata tutti i termini scompariscono a riserva del primo, in cui l'incognita continua ad essere elevata alla massima potestà, sarà segno certo, che la quantità, di cui si è accresciuto, o sminuito il valore dell'incognita nell'equazione proposta, è appunto un valore reale d'essa equazione.

Per far scomparire il secondo termine dall'equazione $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$, s'avrà $x - 4 = y$, e quindi $x = y + 4$. Col costituire poi i valori di x, si ha

$$\left.\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\ -12x^2 = & \ldots - 12y^2 - 96y - 192 \\ +48x = & \ldots\ldots\ldots + 48y + 192 \\ -64 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 64 \end{array}\right\} = 0$$

e corretta l'espressione, si ha la trasformata $y^3 = 0$, la qual cosa fa vedere, che 4 è un valore dell'incognita x dell'equazione proposta.

37. Si trasformano finalmente le equazioni per mezzo di moltiplica, o di divisione, allorchè dalla proposta equazione si vuole far sparire i rotti (§. 32), o pure i radicali, o si cerca di rendere più semplici l'omogeneo, ed i coefficienti degli altri termini.

Per trasformare l' equazione $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ per mezzo della moltiplica, suppongasi, che si debbano duplicare i valori dell' incognita. Per fare quest' operazione basterà scrivere 2 sotto il secondo termine, il quadrato di 2 sotto il terzo termine, il cubo di 2 sotto il quarto termine, la quarta potestà di 2 sotto il quinto termine ec.; indi questi numeri scritti al di sotto si moltiplicheranno pel corrispondente termine superiore, ed i prodotti si scriveranno per coefficienti di un' altra incognita.

Ordinando pertanto le cose nella divisata maniera, sarà

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, e fatte le

$\qquad\;\; 2 \qquad 4 \qquad 8$

moltipliche, e scrivendo y in vece di x, s' avrà l' equazione trasformata $y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0$, in cui il valore di y è doppio di quello di x, cioè $y = 2x$.

Se si vorranno moltiplicare per 10 i valori dell' incognita della seguente equazione $y^4 - ay^3 + a^2y^2 - c^3y + d^4 = 0$, si scriverà 10 sotto il secondo termine, il suo quadrato sotto il terzo termine ec., e s' avrà $y^4 - ay^3 + a^2y^2 - c^3y + d^4 = 0$;

$\qquad\qquad 10 \qquad 100 \qquad 1000 \qquad 10000$

e fatte le moltipliche, e scrivendo z in vece di y nella proposta equazione, s'avrà la trasformata $z^4 - 10az^3 + 100a^2z^2 - 1000c^3z + 10000d^4 = 0$, in cui i valori sono decupli di quelli della proposta equazione, cioè $z = 10y$.

Occorrendo, che nella proposta equazione manchi qualche termine, si noterà l' asterisco in vece del termine mancante, indi si scriveranno al di sotto i numeri, come sovra. Per esempio, se s'abbia l' equazione $x^3 - 14x^2 + 288 = 0$, e si debbano moltiplicare i valori di x per 3, si scriverà $x^3 - 14x^2 * + 288 = 0$,

3 9 27

e fatte le attuali moltipliche, s' avrà l' equazione trasformata $y^3 - 42y^2 + 7776 = 0$, in cui il valore di $y = 3x$.

38. Per mezzo della data regola (§ 37) si potranno far sparire i rotti da un' equazione. Sia proposta l' equazione

$$x^3 - ax^2 + \frac{c^2x}{f} - m^2d = 0,$$ per fare sparire da essa il rotto, basterà scrivere il denominatore f sotto il secondo termine, il suo quadrato sotto il terzo, la sua terza potestà sotto il quarto termine

ec., come segue, $\frac{x^3 - ax^2}{f} + \frac{c^2x}{f^2} - \frac{m^2d}{f^3} = 0$,

e fatte le moltipliche, e sostituendo y in vece di x, s' avrà $y^3 - afy^2 + c^2fy - m^2f^3d = 0$, in cui il valore di $y = fx$.

Nell' equazione

$$z^4 + cz^3 - \frac{10z^2}{m} - \frac{a^2z}{2} + 130d^2 = 0,$$

essendo due i rotti, si moltiplicheranno fra loro i denominatori m, e 2, e il prodotto $2m$ si scriverà sotto il secondo termine, il quadrato di $2m$ sotto il terzo termine, e così successivamente si scriveranno le altre potestà di $2m$, onde s' otterrà

$$z^4 + cz^3 - \frac{10z^2}{m} - \frac{a^2z}{2} + 130d^2 = 0$$

$$2m, \quad 4m^2, \quad 8m^3, \quad 16m^4$$

e fatta la moltiplica, sarà $y^4 + 2cmy^3 - 40my^2 - 4a^2m^3y + 2080d^2m^4 = 0$ l'equazione trasformata, in cui il valore di $y = 2mz$.

39. Occorrendo poi, che il denominatore del rotto sia una potestà perfetta nel sito, che si conviene, verbigrazia un quadrato nel terzo termine, un cubo nel quarto ec., allora si potrà semplificare l' operazione, scrivendo a

dirittura la sua radice sotto al secondo termine, in vece di scrivere esso denominatore. Per esempio nell' equazione

$$x^4 - 10x^3 + \frac{37x^2}{9} - 50x + \frac{100}{81} = 0,$$ sic-

come il divisore 9 del terzo termine è il quadrato di 3, e che il divisore 81 del quinto termine è la quarta potestà di 3, così in vece di scrivere sotto il secondo termine 9×81, basterà scrivere 3, ed in seguito le sue potestà, e sarà

$$x^4 - 10x^3 + \frac{37x^2}{9} - 50x + \frac{100}{81} = 0,$$ e

3 9 27 81

fatte le moltipliche, s'avrà l'equazione trasformata $y^4 - 30y^3 + 37y^2 - 1350y + 100 = 0$, in cui $y = 3x$.

Se il denominatore del rotto non sarà una potestà perfetta, ma si potrà rendere tale collo schizzare il rotto, o col moltiplicarlo, converrà ciò fare, affine di sminuire il calcolo. Per esempio nell' equazione $y^3 - 4y^2 + \frac{56y}{175} - 40 = 0$ il denominatore 175 non è quadrato perfetto, ma può riuscir tale collo schizzare il rotto, e ridurlo a $\frac{8}{25}$;

onde allora basterà moltiplicare l'equazione per 5 in vece di 175 (§. 37), e s' avrà la trasformata $z^3 - 20z^2 + 8z - 5000 = 0$.

Abbiasi l' equazione

$x^4 - 5x^3 + 19x + \frac{37}{8} = 0$, siccome in questo caso dovrebbe il divisore 8 essere una quarta potestà, e che si può render tale col moltiplicarlo per 2, così in vece di $\frac{37}{8}$ si scriverà $\frac{74}{16}$, e quindi l' equazione si moltiplicherà per 2 quarta radice di 16, scrivendo

$$x^4 - 5x^3 * + 19x + \frac{74}{16} = 0.$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$

e fatta la moltiplica, s' avrà la trasformata $y^4 - 10y^3 + 152y + 74 = 0$.

40. Nel trasformare un'equazione per mezzo di moltiplica si possono talora far sparire anche i radicali, che s' incontrano in alcuni de' suoi termini, la qual cosa è molto comoda, poichè in questa maniera l'equazione non cresce mai di grado, mentre che, qualora s' adopera il metodo ordinario (Elementi d' Algebra), l' equazione ascende a grado superiore.

Sia proposta l' equazione $x^2 + 5x\sqrt{3} - 18 = 0$, per togliere da questa il radicale, trasformando l' equazione, basterà scrivere $\sqrt{3}$ sotto il secondo termine, e il suo quadrato sotto il terzo, cioè

$$x^2 + \underset{\sqrt{3}}{5x\sqrt{3}} - \underset{3}{18} = 0,$$

e indi fatta la moltiplica, e scrivendo un' altra incognita in vece di x, s' avrà $y^2 + 3 \times 5y - 3 \times 18 = 0$, o sia $y^2 + 15y - 54 = 0$, e conseguentemente sarà $y = x\sqrt{3}$.

Se dalla proposta equazione $z^3 - az^2\sqrt[3]{4} + c^2z\sqrt[3]{16} - c^3 = 0$ si cerca di far sparire i radicali, basta scrivere $\sqrt[3]{2}$ sotto il secondo termine, il suo quadrato sotto il terzo termine, il suo cubo sotto il quarto, e sarà

$$z^3 - \underset{\sqrt[3]{2}}{az^2\sqrt[3]{4}} + \underset{\sqrt[3]{4}}{c^2z\sqrt[3]{16}} - \underset{2}{c^3} = 0,$$

e fatta la moltiplica, e scrivendo in vece di z un' altra incognita, s' avrà l' equazione trasformata $x^3 - ax^2\sqrt[3]{8} + c^2x\sqrt[3]{64} - 2c^3 = 0$, e correggendo l'espressione, sarà $x^3 - 2ax^2 + 4c^2x - 2c^3 = 0$, dalla quale si raccoglie poi $x = z\sqrt[3]{2}$.

Se dall' equazione $y^3 + 2y^2\sqrt{5} - 20y + 30\sqrt{5} = 0$ si do-

vranno fare sparire i radicali, si scriverà sotto il secondo termine $\sqrt{5}$, e indi successivamente per ordine le altre potestà di $\sqrt{5}$, e s'avrà

$$y^3 + 2y^2\sqrt{5} - 20y + 30\sqrt{5} = 0,$$
$$\sqrt{5} \qquad 5 \qquad 5\sqrt{5}$$

e fatta la moltiplica, s'avrà per l'equazione trasformata $z^3 + 10z^2 - 100z + 750 = 0$, da cui si deduce poi $z = y\sqrt{5}$.

41. Per trasformare un' equazione per mezzo della divisione in modo però, che non nascano dei rotti, converrà dividere il coefficiente del secondo termine per un numero, che lo misuri esattamente, e che possa con il suo quadrato misurare esattamente il coefficiente del terzo termine, col suo cubo misurare esattamente il coefficiente del quarto termine, e così successivamente scrivendo poi un'altra incognita in vece della proposta.

Debbasi trasformare l' equazione $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$ colla divisione; siccome la quantità a misura esattamente il coefficiente del secondo termine, e che a^2 misura esattamente il terzo, a^3 misura esattamente il quarto termine, così si scriverà

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0,$$
$$a \qquad a^2 \qquad a^3$$

e fatta la divisione termine per termine, s' avrà $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0$ per l'equazione trasformata, in cui $z = \frac{x}{a}$

Sia proposta l' equazione

$$y^4 + 10y^3 - 150y^2 - 375y + 5000 = 0$$

da trasformarsi colla divisione, senza che nascano de' rotti. Si osserva in primo luogo, che le potestà di 10 non potendo dividere i coefficienti degli altri termini, fa di mestiere prendere un numero minore di 10, che lo misuri esattamente. Fra questi se ne danno due, e sono 5, e 2; ma, siccome di questi due numeri solamente le potestà del 5 misurano esattamente i coefficienti degli altri termini, così si scriverà

$$y^4 + \frac{10y^3}{5} - \frac{150y^2}{25} - \frac{375y}{125} + \frac{5000}{625} = 0$$

e fatta la divisione, s'avrà l' equazione trasformata $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 3x + 8 = 0$, in cui i coefficienti, e l' omogeneo sono assai più semplici, che nella proposta. Se in quest' equazione si troverà il valore di x, s' avrà poi quello di y, facendo $x = \frac{y}{5}$.

42. Per mezzo della divisione si possono anche talora far sparire i radicali da un' equazione. Abbiasi l' equazione $x^3 + 2x^2\sqrt{5} - 20x + 30\sqrt{5} = 0$, siccome questa è divisibile per $\sqrt{5}$, e per le sue potestà, così si scriverà

$$\frac{x^3}{\sqrt{5}^3} + \frac{2x^2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{20x}{5} + \frac{30\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = 0,$$

e fatta la divisione, sarà $y^3 + 2y^2 - 4y + 6 = 0$, e quindi $y = \frac{x}{\sqrt{5}}$.

Per liberare dai radicali l' equazione $z^4 - z^3\sqrt{c} + cdz^2 + cm^2z\sqrt{c} + c^2f^2 = 0$, si osserva, che essa è divisibile per $\sqrt{c}$, e per le sue potestà, onde si scriverà

$$\frac{z^4}{} - \frac{z^3\sqrt{c}}{\sqrt{c}} + \frac{cdz^2}{c} + \frac{cm^2z\sqrt{c}}{c\sqrt{c}} + \frac{c^2f^2}{c^2} = 0,$$

e fatta la divisione, s' otterrà

$x^4 - x^3 + dx^2 - m^2x + f^2 = 0$ per l'equazione trasformata, in cui il valore di $x = \frac{z}{\sqrt{c}}$.

43. Dall' osservare il modo, con cui si sono maneggiate tutte le trasformazioni, si scorge facilmente:

1.° Che le radici reali, e le immaginarie dell' equazione trasformata con-

tinuano ad essere della natura medesima di prima.

2.° Che, se nel trasformare l'equazione per mezzo della somma, o della sottrazione la quantità $= q$, che s'aggiunge, o si leva sarà razionale, i valori della trasformata continueranno ad essere razionali, o sordi, come erano prima; ma muteranno specie essi valori, se q sarà irrazionale, eccettuatone il caso, in cui, essendo sordi i valori dell'incognita, saranno comunicanti col radicale q.

3.° Nel trasformare un' equazione per mezzo della moltiplica, o della divisione i valori della trasformata continueranno pure ad essere razionali, o sordi, come erano prima, o pure muteranno specie, secondo che sarà razionale, od irrazionale la quantità $= q$, che si usa nella moltiplica, o nella divisione.

CAPO III.

Indagare, se nell' equazione s' incontrano radici immaginarie.

44. Le radici immaginarie, che s'incontrano nell' equazione finale di un problema, sono prodotte da uno, o più assurdi formati dalle condizioni poste nel problema, e questi assurdi si manifestano, ognorachè nel risolvere l' equazione si dee estrarre la radice quadrata da una quantità negativa (Elementi dell' Algebra).

Affine pertanto di non perdere inutilmente il tempo nel tentare la soluzione di que' problemi di grado pari, che per cagione dei detti assurdi non sono risolvibili, d' uopo è indicare le diverse maniere, per cui s' arriva a conoscere, se l' equazione proposta contiene delle immaginarie, o se ne va esente.

45. Sono immaginarj i valori dell' incognita nell' equazione $x^2 + a^2 = 0$, o sia $x^2 = - a^2$, stantechè si dee estrarre la radice quadrata dalla quantità negativa $- a^2$, e sono pure immaginarj i

valori dell' incognita nell' equazione affetta $x^2 \pm 2cx + a^2 = 0$, ognivoltachè il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine è minore di a^2, poichè in questo caso l' espressione $- a^2 + c^2$, da cui si dee estrarre la radice quadrata, è quantità negativa. Ciò posto, vediamo le maniere di scoprire le immaginarie nelle equazioni di grado superiore al secondo.

46. Per conoscere, se le equazioni, le quali hanno tutti i termini, contengono delle immaginarie, è necessario, che tutte le loro radici sieno positive, vale a dire, che i segni sieno alternamente positivi, e negativi (§. 12. n. 7), ed ove non sieno tali, converrà trasformare l' equazione col mezzo della somma (§. 34). Ciò posto per iscoprire se l' equazione di terzo grado $x^3 - px^2 + qx - m = 0$ contiene delle immaginarie, si moltiplichi ciascun termine per la serie dei numeri naturali, incominciando da quello, che esprime l' esponente massimo dell' incognita, e continuando sino al zero, s' avrà

$3x^3 - 2px^2 + 1 \times qx - 0 \times m = 0$, e correggendo l' espressione, e dividendo

per x, stantechè l' ultimo termine, essendo moltiplicato per zero, scomparisce, s' avrà

$3x^2 - 2px + q = \varnothing$, o sia $x^2 - \frac{2px}{3} + \frac{q}{3} = \varnothing$. Ora, se le due radici di quest'equazione saranno immaginarie, tali saranno anche due radici della proposta equazione del terzo grado; ma nelle equazioni di secondo grado sono immaginarie le radici, ognorachè $\frac{p^2}{9}$ è minore di $\frac{q}{3}$, o sia $\frac{p^2}{3} < q$ (§. 45). Adunque si dirà per regola generale, che

Nelle equazioni del terzo grado, le quali hanno tutte le radici positive, s' incontrano delle immaginarie, ognivoltachè il coefficiente del terzo termine è maggiore della terza parte del quadrato fatto dal coefficiente del secondo termine.

47. In altra maniera ancora si può conoscere, se esistono delle immaginarie nelle equazioni di terzo grado, le quali hanno tutte le radici positive, come $x^3 - px^2 + qx - r = \varnothing$. Si moltiplichino per ordine i termini della proposta

equazione per la serie de' numeri naturali, la quale principia dal zero, come $\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3$, e si avrà $0 \times x^3 - 1 \times px^2 + 2 \times qx - 3 \times r = 0$, e corretta l'espressione, siccome il termine $0 \times x^3$ sparisce, sarà $-px^2 + 2qx - 3r = 0$, ossia, rendendo positiva la massima potestà dell'incognita, e libera dal coefficiente, $x^2 - \frac{2qx}{p} + \frac{3r}{p} = 0$, in cui, se le radici saranno immaginarie, tali saranno anche due radici della proposta cubica equazione: ma nell'equazione $x^2 - \frac{2qx}{p} + \frac{3r}{p} = 0$ sono immaginarie le radici, ognivoltachè $\frac{q^2}{p^2} < \frac{3r}{p}$, ossia quando $\frac{q^2}{3} < pr$, adunque si dirà per regola generale, che le equazioni di terzo grado, di cui si ragiona, contengono due radici immaginarie, qualora, moltiplicando l'ultimo termine pel coefficiente del secondo, il prodotto riesce maggiore della terza parte del quadrato fatto dal coefficiente del terzo termine.

48. Le regole date nei due precedenti paragrafi servono precisamente per tutte le equazioni di grado superiore al

terzo, ognorachè queste hanno tutte le radici positive.

Per conoscere, se in una equazione del quarto grado $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + m = 0$ s'incontrano delle immaginarie, basterà moltiplicare ciascun termine pel corrispondente esponente dell' incognita, come abbiamo fatto (§. 46), e dopo d'aver corretta l'espressione, s'avrà l'equazione di terzo grado $x^3 - \frac{3px^2}{4} + \frac{qx}{2} - \frac{r}{4} = 0$, ma in questa equazione esistono delle radici immaginarie, ognivoltachè il quadrato del coefficiente del secondo termine diviso per 3 è minore del coefficiente del terzo termine, o pure quando la terza parte del quadrato del coefficiente del terzo termine è minore del prodotto fatto dalla moltiplica dell' ultimo termine nel coefficiente del secondo: adunque si dirà per regola generale, che nelle equazioni del quarto grado, le quali hanno tutti i valori dell' incognita positivi, vi saranno delle immaginarie, ognivoltachè il coefficiente del terzo termine sarà maggiore delle tre ottave parti del quadrato fatto

dal coefficiente del secondo termine, o pure quando il prodotto fatto dai coefficienti del secondo nel quarto termine è maggiore dei $\frac{4}{9}$ del quadrato fatto dal coefficiente del terzo termine.

49. Un'altra maniera si può ancora praticare per conoscere, se s'incontrano delle immaginarie nelle equazioni di quarto grado $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + m = 0$.

Si moltiplichi ordinatamente ciascun termine della proposta equazione per una progressione aritmetica, il di cui primo termine sia zero, come $\div 0$, 1, 2, 3, 4 (§. 47), e s'avrà $0 \times x^4 - 1px^3 + 2qx^2 - 3rx + 4m = 0$, e correggendo l'espressione, e rendendo positiva la massima potestà dell'incognita, e libera dal coefficiente, sarà

$x^3 - \frac{2qx^2}{p} + \frac{3rx}{p} - \frac{4m}{p} = 0$; ma in quest' equazione di terzo grado esistono delle immaginarie non solo quando il coefficiente del terzo termine è maggiore della terza parte del quadrato fatto dal coefficiente del secondo termine, ma ancora quando il prodotto dell'ultimo termine moltiplicato nel coefficiente del

secondo è maggiore della terza parte del quadrato fatto dal coefficiente del terzo termine: adunque nelle equazioni del quarto grado s'incontreranno delle immaginarie, qualora ec.

50. Il metodo dato per conoscere, se nelle equazioni di terzo, e quarto grado esistono delle immaginarie, potendosi applicare facilmente alle equazioni di grado superiore a queste, purchè le medesime abbiano tutte le radici positive, o che colla trasformazione sieno rese tali, convien ora individuare alcune altre maniere, affinche l'Analista nelle diverse operazioni, che gli occorrerà fare per trattare le equazioni composte, possa conoscere, se in queste vi sono delle immaginarie.

51. Nella proposta equazione si trovino i divisori dell'omogeneo, e si registrino a parte, indi, se l'equazione ha tutte le radici positive, si sostituiscano in vece dell'incognita un dopo l'altro essi divisori presi positivamente, e se in queste sostituzioni s'incontrerà sempre un avanzo collo stesso segno, saremo certi, che l'equazione contiene delle immaginarie.

Nell' equazione
$x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 24x + 24 = 0$ si osservano positivi tutti i valori dell' incognita; i divisori dell' omogeneo sono 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Col sostituire nell' equazione essi divisori uno dopo l'altro, si ha il seguente risultamento.

Divisori, che si sostituiscono.	Risultamenti.	Avanzi:
$x=1$ ..	$1 - 5 + 16 - 24 + 24 = +$	12
$x=2$ ..	$16 - 40 + 64 - 48 + 24 = +$	16
$x=3$ ..	$81 - 135 + 144 - 72 + 24 = +$	42
$x=4$ ..	$256 - 320 + 256 - 96 + 24 = +$	120
$x=6$ ..	$1296 - 1080 + 576 - 144 + 24 = +$	672
$x=8$ ..	$4096 - 2560 + 1024 - 192 + 24 = +$	2392

in cui si vede, che gli avanzi sono sempre positivi, e che i medesimi vanno sempre crescendo; onde si conchiude, che l' equazione proposta contiene delle immaginarie. Per altro quest' operazione si può abbreviare assai, bastando sostituire i divisori minori del coefficiente del secondo termine, giacchè questo

coefficiente esprime la somma di tutti i valori dell' incognita (§ 12).

Se l' equazione proposta avrà tutte le radici negative, cioè tutti i termini avranno il segno +, converrà sostituire i divisori presi negativamente, e si dirà, che la medesima ha delle immaginarie, se gli avanzi non muteranno giammai segno.

Finalmente, se l' equazione proposta avrà delle radici positive, e delle negative, cioè i segni saranno disposti con ordine perturbato, converrà sostituire i divisori presi positivamente, e indi negativamente, e provare anche quelli, che sono maggiori del coefficiente del secondo termine, stantechè in questo caso esso coefficiente esprime la differenza fra i valori positivi, e negativi dell' incognita, ed ove risulti, che gli avanzi non mutano giammai segno, si dirà, che l' equazione contiene delle immaginarie.

Questa regola serve anche, quando nell' equazione manca uno, o più termini.

52. Nelle equazioni mancanti di uno, o più termini si dirà, che esistono delle immaginarie, ognivoltachè, dopo d' aver

scritto gli asterischi preceduti dal segno ambiguo ± in vece dei termini mancanti, risulteranno conclusioni diverse nelle due supposizioni del segno positivo, e indi negativo.

Nell' equazione $x^3 + c^2x - a^3 = 0$ si scriva l' asterisco col segno ambiguo nel sito del secondo termine, e s' avrà $x^3 \pm * + c^2 x - a^3 = 0$. Dalla supposizione, che l'asterisco abbia il segno $+$, risultano due valori negativi, ed uno positivo, e dal supporre, che l' asterisco abbia il segno $-$, risultano tutti e tre positivi i valori. Da questa discrepanza si conchiude, che l' equazione contiene delle immaginarie.

Nell' equazione $z^3 - c^3 = 0$ si scrivano gli asterischi in vece dei termini mancanti, e si ha $z^3 \pm * \pm * - c^3 = 0$. Nella supposizione che i due asterischi sieno preceduti ambidue dal segno $+$, o dal segno $-$, risultano due valori negativi, ed uno positivo; ma, se si suppone, che il primo d' essi abbia il segno $-$, e l' altro il segno $+$, si vede, che i tre valori dell' incognita sono positivi; epperò si conchiude, che nell' equazione proposta s' incontrano delle immaginarie.

Operando nella stessa maniera si troverà, che le seguenti equazioni contengono delle immaginarie.

$y^4 - ay^3 - c^3y + c^4 = 0, x^4 + cx^3 + d^4 = 0$; e si troverà anche, che tutte le equazioni pure di grado superiore al secondo, come sono $x^4 \pm a^4 = 0$, $z^5 \pm a^5 = 0$, $y^6 \pm c^6 = 0$ ec., contengono sempre delle immaginarie con questo divario, che in quelle di grado pari saranno immaginarie tutte le radici, ogni volta che l'omogeneo avrà il segno positivo, essendo l'equazione uguale al zero.

53. La regola data nell' antecedente paragrafo non ammette eccezione, qualora nelle due supposizioni del segno, che precede l'asterisco, risultano conseguenze diverse; ma, quando nelle dette due supposizioni le conseguenze sono identiche, non si può già conchiudere, che l'equazione vada esente dalle immaginarie. Per darne un riscontro, nell' equazione $y^3 - 26y + 60 = 0$ si scriva l'arterisco, e fatto il solito esame, si troverà, che in ambedue le supposizioni le conseguenze sono identiche, cioè che l'equazione contiene due radici positive, ed una negativa; onde

per questo riguardo non si ha motivo di dire, ch' essa contenga delle immaginarie, quando per altro la medesima è composta dalla semplice $y + 6 = 0$, e dall' altra di secondo grado $y^2 - 6y + 10 = 0$, le cui radici sono immaginarie.

Occorrendo pertanto, che nell' operare, come sovra, s' incontrino le medesime conseguenze, converrà per accertarsi, che l' equazione va esente dalle immaginarie, usare la regola data (§. 51), o pure trasformare l' equazione in un' altra, la quale abbia tutte le radici positive, per valersi quindi delle altre regole descritte (§. 46, 47, 48, 49).

54. Si dirà pure, che un' equazione di qualsivoglia grado contiene delle immaginarie, ogni volta che, avendo tutte le sue radici positive, si dividerà per un' equazione semplice formata dall' incognita meno uno de' divisori dell' omogeneo minori del coefficiente del secondo termine, e che nel quoziente s' avrà una equazione, le cui radici saranno di natura diversa da quelle, che risultano nella proposta. Per esempio dell'equazione $y^3 - 5y^2 + 3y - 30 = 0$, le radici sono tutte positive; si divida

per $y - 2 = 0$, e s' avrà di quoziente $y^2 - 3y - 3 = 0$, in cui ravvisandosi una radice positiva, ed una negativa, si conchiude, che l'equazione proposta contiene delle immaginarie.

Se l'equazione $z^3 - 8z^2 + 11z - 36 = 0$, in cui tutte le radici sono positive, si dividerà per $z - 1$, s' avrà di quoziente $z^2 - 7z + 4 = 0$, le cui radici sono pure positive, come nell' equazione proposta, ma se si dividerà per $z - 3$, s' otterrà di quoziente $z^2 - 5z - 4 = 0$, in cui s' osserva una radice positiva, e l' altra negativa; onde si conchiude, che nell' equazione proposta s' incontrano delle immaginarie.

Dal risultamento di quest' operazione consegue pure, che per iscoprire, se l' equazione contiene delle immaginarie, d' uopo è tentare tutti i divisori dell' omogeneo minori del coefficiente del secondo termine, ognorachè nei primi tentamenti non s' incontra mutazione alcuna nell' equazione, che s' ottiene per quoziente.

55. Se, dopo d' aver tentate tutte le divisioni come sovra, non s' incontrerà mutazione alcuna nelle radici del

quoziente, non si potrà già conchiudere, che l' equazione proposta vada esente dalle immaginarie, ma converrà badare agli avanzi, che si sono ottenuti dalle divisioni, e qualora questi avanzi avranno sempre lo stesso segno, allora si dirà, che l'equazione contiene delle immaginarie; ma, se questi avanzi muteranno segno tante volte, quante sono le unità comprese nell'esponente massimo dell'incognita, saremo certi, che l' equazione ne va esente; e se in una di queste divisioni s' incontrerà un quoziente esatto, l' equazione semplice, che divide la proposta, sarà una delle sue radici.

Dividendo, come sovra, l' equazione $x^3 - 6x^2 + 30x - 20 = 0$, si hanno i seguenti risultamenti.

Divisori.	Risultamenti.	Avanzi.
$x - 1$	$x^2 - 5x + 25$	$+ 5$
$x - 2$	$x^2 - 4x + 22$	$+ 24$
$x - 4$	$x^2 - 2x + 22$	$+ 68$
$x - 5$	$x^2 - x + 25$	$+ 105$

Siccome in questi quozienti risultano sempre le radici positive, così non si ha motivo a dire, che nella proposta equazione s' incontrino delle immaginarie; ma dall' osservare, che gli avanzi conservano lo stesso segno, si conchiude, che la proposta equazione contiene delle immaginarie. La combinazione adunque di queste due osservazioni somministra un' altra regola generale per conoscere in tutti i casi, se l' equazione proposta, che ha tutte le radici positive, contiene delle immaginarie.

56. Le regole date (§§. 54, 55) per le equazioni, le quali hanno tutte le radici positive, si debbono applicare precisamente a quelle, che hanno tutti i valori negativi, purchè si scriva col segno + la quantità cognita, la quale serve a formare l' equazione dividente.

CAPO IV.

Trovare i valori reali dell' incognita nelle equazioni numeriche di grado superiore.

57. Varj sono i metodi ideati dai Matematici per trovare i valori reali dell' incognita nelle equazioni numeriche di grado snperiore. Alcuni di questi metodi sono particolari, stantechè o non servono per tutte le equazioni, o non ne comprendono tutti i casi. Altri metodi poi, i quali sono facili per le equazioni di terzo, e di quarto grado, riescono molto laboriosi, e talora anche impraticabili, quando s' applicano a equazioni più elevate.

Altri finalmente sono generali, con questo divario però, che gli uni si praticano in una maniera determinata, mentre negli altri si procede tentando.

Fra i metodi, che fin' ora sono noti, noi tratteremo nel capo presente di quello, in cui si risolve l' equazione proposta nelle sue componenti, riserbandosi di dare nel libro seguente la maniera generalissima di risolvere le

equazioni mediante la dottrina, che si spiega in questo libro.

58. Per trovare col presente metodo i valori dell'incognita è necessario:

1.° Ridurre l'equazione al zero, e fare sì, che l'incognita sia positiva, e libera da qualunque coefficiente, e divisore.

2.° Che l'equazione sia esente da qualunque frazione, e quando non sia tale, converrà trasformarla a norma del capo 2.°

3.° Dovrà pure l'equazione esser libera dai radicali, e incontrandosene qualcheduno, si farà sparire colle trasformazioni, o coi ripieghi dati negli Elementi dell'Algebra secondo che riuscirà più in acconcio.

4.° Occorrendo, che riesca troppo laborioso di trovare i valori dell'incognita nelle equazioni molto composte, si esaminerà, se sia fattevole di trasformarle in altre più semplici.

5.° Ridotta, come sovra, l'equazione proposta, d'uopo è, prima d'ogni cosa, badare al numero de' suoi termini, indi esaminare a quale delle specie divisate nel capo 1.° essa appartiene,

affine di valersi di que' ripieghi, che nella varietà de' casi agevolano la scoperta di quanto ricercasi.

59. Le equazioni le più semplici sono espresse da questa canonica $x^n \pm a^n = \emptyset$, di cui si è già data la soluzione (§. 16).

A queste equazioni succedono quelle altre, che hanno tre termini. Qualora sommiglianti equazioni sono derivative, esse trovansi tutte incluse in quest' altra espressione canonica $y^n \pm a^m y^{\frac{n}{2}} \pm c^n = \emptyset$, della di cui soluzione si è pure trattato negli Elementi dell' Algebra.

60. Le equazioni, che hanno quattro termini, si debbono esaminare, se appartengono ai (§§. 23, 24), avvegnachè, se si trovano essere di questa specie, la loro soluzione riesce facilissima.

Sia proposta a risolvere l' equazione $z^3 + 7z^2 - 20z - 140 = \emptyset$. L' ordine de' segni, ed il prodotto de' coefficienti de' due termini di mezzo uguale all' omogeneo dimostrano, ch' essa appartiene ai (§§. 23, 24), e quindi a tenore d' essi paragrafi si conchiude, che le due componenti sono $z^2 - 20 = \emptyset$,

$z + 7 = 0$, nelle quali, trovando il valore dell' incognita, si ha $z = \pm \sqrt{20}$, $z = - 7$.

Esaminando l' equazione
$x^4 - 8x^3 + 27x - 216 = 0$, si trova, ch' essa appartiene pure ai (§§. 23, 24), e che le sue componenti sono $x + 27 = 0$, $x - 8 = 0$, e quindi i valori reali dell' incognita sono $x = 8$, $x = - 3$, essendo immaginarj gli altri due.

Considerando l' equazione proposta $y^7 - 64y^4 + 49y^3 - 3136 = 0$, si trova, ch' essa appartiene anche ai (§§. 23, 24); e però le sue componenti sono $y^4 + 49 = 0$, $y^3 - 64 = 0$. La prima di queste equazioni semplici ha i quattro valori dell' incognita immaginarj, e la seconda somministra il solo valor reale $y = 4$.

Se si esamina l' equazione
$z^{11} - 12z^8 - 6491z^3 + 77892 = 0$, si trova, ch' essa appartiene pure ai (§§. 23, 24), e che le sue componenti sono $z^8 - 6491 = 0$, $z^3 - 12 = 0$. Dalla prima di queste equazioni si ricava $z = \pm 3$, essendo immaginarie le altre sei radici, e dalla seconda si ha $z = \sqrt[3]{12}$, essendo pure immaginarie le altre due radici.

61. Se le equazioni proposte avranno sette termini, si esaminerà, se appartengono a uno de' due (§§. 27, 28). Se si considera l' equazione $x^{10} + 6x^8 - 27x^7 - 194x^5 - 192x^3 + 864x^2 + 5184 = 0$, si trova, ch' essa appartiene al (§. 27), e operando a norma delle regole ivi date, si ricavano le tre componenti $x^5 - 32 = 0$, $x^3 - 27 = 0$, $x^2 + 6 = 0$, la prima delle quali dà il valore reale $x = 2$, la seconda dà $x = 3$, essendo immaginarie tutte le altre radici.

Se si considera l' equazione
$z^8 - 13z^7 + 8z^5 - 185z^4 + 1053z^3 - 648z + 8424 = 0$, si trova, ch' essa appartiene al (§. 28), e che le sue componenti sono $z^4 - 81 = 0$, $z^3 + 8 = 0$, $z - 13 = 0$. La prima di queste equazioni somministra $z = \pm 3$, la seconda dà $z = -2$, e la terza dà $z = 13$.

62. Se le equazioni da risolvere avranno otto termini, si confronteranno coi (§§. 25, 26, 29) per vedere, se appartengono a qualcheduno di essi.

Esaminando l' equazione
$z^9 - 6z^7 + 27z^6 - 100z^5 - 162z^4 + 600z^3 + 2700z^2 - 16200 = 0$, si trova, ch'ella appartiene ai (§§. 25, 26), onde, ope-

rando a tenore delle regole date in detti paragrafi, si trova, che le sue componenti sono $z^4 - 100 = 0$, $z^3 + 27 = 0$, $z^2 - 6 = 0$. La prima di queste equazioni somministra i due valori reali $z = \pm\sqrt{10}$, essendo immaginarj gli altri due; dalla seconda si ricava il solo valor reale $z = -3$, e dalla terza si ha $z = \pm\sqrt{6}$.

Se si considera l' equazione
$x^{14} - 10x^{11} - 32x^9 - 729x^8 + 320x^6 + 7290x^5 + 23358x^3 - 233580 = 0$, si trova, ch' essa appartiene pure ai (§§. 25, 26), e che le equazioni componenti sono $x^6 - 729 = 0$, $x^5 - 32 = 0$, $x^3 - 10 = 0$. Dalla prima si ricavano due soli valori reali $x = \pm 3$. Dalla seconda s'ottiene il solo valor reale $x = 2$, e la terza dà pure il solo valor reale $x = \sqrt[3]{10}$.

Se si esamina l' equazione
$z^9 + z^8 - 64z^6 - 64z^5 - 40z^4 - 40z^3 + 2560z + 2560 = 0$, si trova, ch' essa appartiene al (§. 29), e quindi le sue componenti sono $z^5 - 40 = 0$, $z^3 - 64 = 0$, $z + 1 = 0$, dalle quali si ricavano i seguenti valori reali $z = \sqrt[5]{40}$, $z = 4$, $z = -1$, essendo poi immaginarj gli altri.

63. Affine poi di accertarsi, che nel determinare le componenti non s' è pre-

so sbaglio, converrà con queste dividere l'equazione proposta per vedere, se si risolve precisamente nelle dette componenti. Se l'equazione $z^9 + z^8 - 64z^6 - 64z^5 - 40z^4 - 40z^3 + 2560z + 2560 = 0$ si dividerà per esempio per $z + 1 = 0$, s'avrà di quoziente esatto $z^8 - 64z^5 - 40z^3 + 2560 = 0$, e se questo quoziente si dividerà per $z^3 - 64 = 0$, si avrà di quoziente esatto l'altra componente $z^5 - 40 = 0$.

64. Se, dopo d'aver esaminata l'equazione proposta, si troverà, che non appartiene a veruno de' casi specificati dal §. 23 sino al §. 29, e neppure al §. 59, converrà cercare di discomporla per un' altra via, servendosi per ciò delle proprietà registrate in altri paragrafi, e specialmente (§. 12, 18). A tal fine s' osserverà l' ordine de' segni per conoscere, se i valori dell' incognita sono tutti positivi, o negativi, e qualora sono misti, s' individuerà il numero di ciascheduna specie. Se in quest' esame si troverà, che i valori dell' incognita sono tutti positivi, o tutti negativi, si registreranno i divisori dell' omogeneo, finchè s' arrivi a quello, che più s' ap-

prossima al coefficiente del secondo termine; ma si continueranno a registrare altri divisori maggiori, se i valori dell' incognita saranno misti.

Ciò fatto, si sceglieranno fra i detti divisori quelli, che sommati insieme (se tutti i valori sono positivi, o negativi), danno un numero uguale al coefficiente del secondo termine, e che fra loro moltiplicati somministrano l' omogeneo, e se i valori saranno misti, si sceglieranno quelli, che, essendo sommati, e sottratti a norma dell' indicazione de' segni, daranno una differenza uguale al coefficiente del secondo termine, ed un prodotto uguale all' omogeneo.

Dopo d' aver ritrovate queste combinazioni, si formerà un' equazione semplice a norma del (§. 13), scrivendo in essa uno di questi divisori, e con questa equazione semplice si dividerà la proposta, e ogni volta che s' otterrà un quoziente esatto, si dirà, ch' essa semplice è una delle componenti.

I seguenti esempj faciliteranno l' intelligenza di questa dottrina.

65. Per cominciare dalle equazioni, nelle quali i valori sono tutti positivi,

o negativi. Abbiasi l'equazione $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, i di cui valori sono tutti positivi; i divisori dell'omogeneo, che non oltrepassano il coefficiente 15, sono 1, 3, 5, 7, 15, fra i quali si trova, che $3 + 5 + 7 = 15$, e che $3 \times 5 \times 7 = 105$. Se si formerà l'equazione semplice con uno di questi divisori, e per esempio $x - 3 = 0$, e con questa si dividerà la proposta, si troverà di quoziente esatto $x^2 - 12x + 35 = 0$. Se quest'equazione si dividerà per un'altra semplice $x - 5 = 0$, s'avrà di quoziente esatto $x - 7 = 0$, epperò le tre componenti saranno $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x - 7 = 0$, e quindi i valori dell'incognita sono $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$.

Dell' equazione

$$y^4 - 21y^3 + 147y^2 - 379y + 252 = 0$$

i valori sono tutti positivi, ed i divisori dell' omogeneo minori del coefficiente 21 sono 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 18. Fra questi si trovano le seguenti combinazioni per rapporto al coefficiente del secondo termine

$$1 + 4 + 7 + 9 = 21$$
$$2 + 3 + 4 + 12 = 21$$
$$3 + 3 + 3 + 12 = 21$$
$$4 + 4 + 6 + 7 = 21.$$

Ma perchè fra esse solamente la prima dà il prodotto $1 \times 4 \times 7 \times 9 = 252$, così si useranno soltanto questi quattro divisori per formare le componenti. Se si dividerà la proposta per la semplice $y - 1 = 0$, s'avrà di quoziente esatto $y^3 - 20y^2 + 127y - 252 = 0$; dividendo quest' equazione per $y - 4$ si trova il quoziente esatto $y^2 - 16y + 63 = 0$, e dividendo quest' ultima equazione per $y - 7 = 0$, si ha il quoziente esatto $y - 9 = 0$. Epperò le componenti sono esse quattro equazioni semplici, dalle quali si ricavano poi i valori dell' incognita $y = 1$, $y = 4$, $y = 7$, $y = 9$.

Dell' equazione $z^5 + 28z^4 + 288z^3 + 1358z^2 + 2927z + 2310 = 0$ i valori sono tutti negativi, ed i divisori dell' omogeneo minori di 28 sono, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 22, fra li quali s' incontrano le seguenti combinazioni rispetto al coefficiente del secondo termine

$2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$
$2 + 5 + 7 + 7 + 7 = 28$
$1 + 2 + 3 + 11 + 11 = 28$
$2 + 5 + 5 + 5 + 11 = 28$
$2 + 5 + 5 + 6 + 10 = 28.$

Ma perchè solamente dalla prima s'ottiene il prodotto $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$, così converrà valersi soltanto di questi cinque divisori per formare le equazioni componenti. Se l' equazione proposta si dividerà per la semplice $z + 2 = 0$, s'avrà il quoziente esatto $z^4 + 26z^3 + 236z^2 + 886z + 1155 = 0$. Dividendo questo quoziente per l' equazione semplice $z + 3 = 0$, si ha un altro quoziente esatto $z^3 + 23z^2 + 167z + 385 = 0$. Col dividere questa equazione per $z + 5 = 0$, si ha il quoziente esatto $z^2 + 18z + 77 = 0$, e dividendo questo quoziente per $z + 7 = 0$, si ha $z + 11 = 0$.

Ritrovate, come sovra, le componenti dell' equazione proposta, si hanno poi i cinque valori negativi dell' incognita $z = -2$, $z = -3$, $z = -5$, $z = -7$, $z = -11$.

66. Supponghasi in secondo luogo, che l' equazione proposta abbia dei valori positivi, ed altri negativi. In questo

caso se ne troverà la soluzione in due maniere. Consiste la prima nel trasformare l'equazione proposta in un'altra, che abbia tutte le radici positive, la quale si maneggierà poi a norma dell'antecedente paragrafo.

L'altra maniera di trattare queste equazioni riesce più lunga, stantechè si debbono registrare tutti i divisori dell' omogeneo anche maggiori del coefficiente del secondo termine, giacchè in questo coefficiente si esprime la differenza fra le radici positive, e le negative (§. 12). Dopo d'aver registrati tutti essi divisori, si osserveranno quali sono le combinazioni fra essi, in cui si trova la differenza uguale al coefficiente del secondo termine, ed il prodotto uguale all'omogeneo. Queste tali combinazioni serviranno a formare le equazioni semplici per dividere la proposta.

Nell' equazione $x^3 - 3x^2 - 46x + 168 = 0$ s' osservano due valori positivi, ed uno negativo, e si vede, che il negativo è minore della somma de'due primi. I divisori dell' omogeneo sono 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, ec., fra i quali s'incontrano le seguenti com-

binazioni relative al coefficiente del secondo termine $4 + 6 - 7 = 3$, $2 + 4 - 3 = 3$, $8 + 7 - 12 = 3$, $1 + 14 - 12 = 3$ ec.; ma perchè solamente dalla prima s'ottiene $4 \times 6 \times 7 = 168$, così basterà valersi di questi tre numeri per formare le equazioni semplici; chiaro essendo, che i due primi, cioè 4, e 6 si debbono considerare come i valori positivi, ed il numero 7 pel negativo. Pertanto, se si divide per $x - 4 = 0$, si ha il quoziente esatto $x^2 + x - 42 = 0$, e dividendo per $x - 6 = 0$, si ha l'altro quoziente esatto $x + 7 = 0$, e però le tre componenti della proposta sono $x - 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 7 = 0$.

Nell'equazione $z^3 - 61\, z + 180 = 0$, dopo d'avere scritto l'asterisco nel sito del secondo termine, si trova, che, due sono i valori positivi, ed uno negativo, il quale uguaglia i due positivi. I divisori dell'omogeneo sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, ec. fra i quali si trovano le seguenti combinazioni rispetto al coefficiente del secondo termine, $2 + 3 - 5 = 0$, $2 + 4 - 6 = 0$, $3 + 6 - 9 = 0$, $4 + 5 - 9 = 0$, $6 + 9 - 15 = 0$, $6 + 12$

$- 18 = 0$; ma perchè fra esse solamente la quarta dà $4 \times 5 \times 9 = 180$, così basterà valersi di questi numeri per formare le equazioni semplici, considerando positivi i due minori 4, e 5, e negativo il maggiore 9. Dividendo l'equazione proposta per esempio per $z + 9$, si ha di quoziente esatto $z^2 - 9z + 20 = 0$, e dividendo questa per $z - 4$, si ha il quoziente esatto $z - 5 - 0$. E però le tre componenti sono $z - 4 = 0$, $z - 5 = 0$, $z + 9 = 0$.

Nell' equazione
$y^4 - 5y^3 - 125y^2 + 885y - 756 = 0$ l' ordine de' segni fa conoscere, che vi sono tre valori positivi, i quali insieme presi sono maggiori del negativo. I divisori dell' omogeneo sono 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 36 ec., fra i quali s' incontrano le seguenti combinazioni riguardo al coefficiente del secondo termine $1 + 7 + 9 - 12 = 5$, $2 + 4 + 6 - 7 = 5$, $4 + 7 + 12 - 18 = 5$ ec.: ma perchè solamente la prima somministra $1 \times 7 \times 9 \times 12 = 756$, così basterà valersi di questi quattro numeri per formare le equazioni semplici, considerando i tre minori per i valori po-

sitivi dell' incognita, ed il maggiore 12 pel negativo. Dividendo per $y - 9$, si ha di quoziente esatto $y^3 + 4y^2 - 89y + 84 = \emptyset$, e dividendo quest' equazione per un altro d' essi numeri, e per esempio per $y + 12$, si ha di quoziente esatto $y^2 - 8y + 7 = \emptyset$, e questa, essendo divisa per $y - 1 = \emptyset$, dà il quoziente esatto $y - 7 = \emptyset$. Dalle ritrovate componenti si ricavano poi i valori dell' incognita $y = -12$, $y = 9$, $y = 7$, $y = 1$.

67. Si dee quì notare, che, quantunque coi divisori dell' omogeneo s' arrivi a formare delle combinazioni rispetto al coefficiente del secondo termine, ed all' omogeneo, succede talora, che i numeri di queste combinazioni non servono a formare tutte le equazioni componenti; la qual cosa dimostra, che nell' equazione proposta si contengono delle radici sorde, o delle immaginarie, e per esempio

Dell' equazione $x^3 - 13x^2 + 41x - 20 = \emptyset$, i di cui valori sono tutti positivi, i divisori dell' omogeneo minori di 13 sono 1, 2, 4, 5, 10, dai quali si ricava la combinazione $1 + 2 + 10 = 13$ rispetto al coefficiente

del secondo termine, e si ha pure $1\times2\times10 = 20$ per rapporto all' omogeneo; ciò non ostante, se si tenta la divisione per $x-1$, o per $x-2$, o per $x-10$, s' incontra sempre un avanzo. In simil caso convien usare gli altri divisori, e tentare la divisione per $x-4$, per $x-5$. Se si divide per $x-4=0$, si trova il quoziente esatto $x^2-9x+5=0$, in cui più non si può fare veruna delle combinazioni altrove descritte; ma per le cose insegnate si ricava, che i valori dell' incognita in quest' equazione di secondo grado sono sordi, cioè

$x=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{61}{4}}$; onde l' equazione proposta ha il solo valore razionale $x=4$.

68. Occorrendo, che fra i divisori dell' omogeneo non si possano ricavare le combinazioni descritte (§. 64), allora saremo certi, che nell' equazione proposta s' incontrano delle radici sorde, o delle immaginarie, o che le componenti non sono tutte del medesimo grado.

In questo caso convien nel formare le equazioni semplici valersi de' divisori uno dopo l' altro per vedere, se s' incontra una qualche radice razionale,

o per trovare i limiti dei valori sordi, o per iscoprire, se s' incontrano delle immaginarie.

Se la proposta equazione avrà tutte le sue radici positive, o tutte negative, la divisione si tenterà con prefiggere il segno +, o — alla cognita, che forma l' equazione semplice, secondo che i valori saranno positivi, o negativi; ma se le radici della proposta saranno miste, converrà tentare la divisione, prefiggendo alla quantità cognita prima un segno, e poi l' altro.

Affine poi di accorgersi, se si avviciniamo al vero valore, converrà badare all' avanzo della divisione, e se si vedrà, che nell' usare due numeri diversi collo stesso segno l' avanzo sminuisce, ciò sarà indizio, che il numero, in cui s' incontra l' avanzo minore, è più vicino al vero valore dell' incognita, e qualora l' avanzo muterà segno, si dirà, che il valore della radice è sordo, e che i due numeri, nei quali gli avanzi hanno segno diverso, somministrano i limiti del valore sordo; ma se gli avanzi non muteranno giammai segno, allora saremo certi, che le radici dell' equazione sono immaginarie.

Da queste operazioni consegue

1.° Che tanti sono i valori razionali dell'incognita, quanti sono i quozienti esatti, che s'ottengono dalle divisioni.

2.° Che tanti sono i valori sordi, quante sono le mutazioni di segno negli avanzi di due divisori dell'omogeneo vicini adoperati collo stesso segno.

3.° Che sono immaginarie le altre radici, che ancora rimangono a scoprirsi, ognorachè gli avanzi non mutano mai segno, essendo i divisori adoperati collo stesso segno (§. 51).

4.° Si dirà pure, che sono immaginarie le radici di un quoziente quantunque esatto, allora quando le radici di questo si manifestano di specie diversa da quella, che indica l'equazione proposta (§. 54).

I seguenti esempj rischiariranno maggiormente questa dottrina

69. Sia proposta l'equazione
$z^4 - 10z^3 + 39z^2 - 86z + 80 = 0$, i di cui valori sono tutti positivi; e però, registrati i divisori dell'omogeneo minori dell'coefficiente 10, s'avrà 1, 2, 4, 5, 8.

Se si tenta la divisione per $z - 1 = 0$; si trova un avanzo, ma tentando la divisione per $z - 2 = 0$, si ha il quoziente esatto $z^3 - 8z^2 + 23z - 40 = 0$.

Se di quest' equazione si tenta la divisione per $z - 4$, si trova un avanzo; ma dividendo per $z - 5 = 0$, si ha il quoziente esatto $z^2 - 3z + 8 = 0$, le cui radici sono immaginarie; onde i due valori reali sono $z = 2$, $z = 5$.

Dell' equazione
$x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 51x^3 + 63x^2 - 54x + 378 = 0$ le radici sono tutte positive, ed i divisori dell' omogeneo, che non oltrepassano il coefficiente del secondo termine, sono 1, 2, 3, 6, 7. Se si tenterà la divisione per $x - 1 = 0$, per $x - 2 = 0$ ec., s' avrà sempre un avanzo; e s' otterrà un quoziente esatto solamente nel dividere per $x - 7 = 0$, vale a dire usando uno de' divisori dell' omogeneo uguale alla somma delle sei radici, la qual cosa fa conoscere, che nella proposta equazione s' incontrano delle immaginarie; da questa divisione s' ottiene il quoziente esatto $x^5 + 6x^3 - 9x^2 - 54 = 0$, in cui s' incontrano le proprietà (§. 23, 24),

e quindi risolta nelle sue componenti, si ha $x^3 - 9 = 0$, $x^2 + 6 = 0$. La prima di queste dà $x = \sqrt[3]{9}$, essendo immaginarie le altre due, e la seconda equazione ha pure le radici immaginarie.

Sia proposta l' equazione $z^3 - 14z^2 + 52z - 50 = 0$. Siccome essa ha tutti i suoi valori positivi, basterà valersi dei divisori dell' omogeneo, che non oltrepassano il coefficiente 14. Questi divisori sono 1, 2, 5, 10, fra i quali non si trova la maniera di fare le combinazioni descritte (§. 64). Si divida adunque l' equazione per $z - 1 = 0$, e si trova l' avanzo -11, dividendo poi per $z - 2 = 0$, si ha l' avanzo $+6$. Da ciò si conchiude, che l' incognita ha un valore sordo compreso fra 1, e 2. Si continui a dividere la proposta equazione per $z - 5 = 0$, e si troverà l' avanzo -15, e poichè quest' avanzo cambia di nuovo segno, si dirà, che un' altra radice sorda incontrasi tra 2, e 5. Dividasi ancora l' equazione proposta per $z - 10$, e si troverà l' avanzo $+70$; da questo nuovo cambiamento di segno si conchiude pure, che il

terzo valore sordo dell' incognita trovasi fra 5, e 10.

Sia proposta l' equazione
$x^4 - 4x^3 - 88x^2 + 471x - 492 = 0$,
in cui l' ordine de' segni dimostra, che incontransi tre valori positivi, i quali insieme presi sono maggiori del negativo; e però converrà scrivere anche i divisori maggiori del coefficiente del secondo termine, e sono 1, 2, 3, 4, 6, 12, 41, 82, 123 ec., dei quali non è fattevole fare le combinazioni (§. 64). Si tentino adunque i divisori dell' omogeneo uno dopo l' altro, e per non moltiplicare male a proposito i tentamenti prima col segno +, e indi col segno —, si rifletta che, siccome i tre valori positivi eccedono il negativo solamente di quattro unità, così dee esso negativo essere considerabilmente maggiore di ciascheduno de' positivi. Riflettendo poi, che, se si moltiplicano fra loro i divisori $2 \times 4 \times 6 \times 12$, si ha 576 alquanto eccedente l' omogeneo, e che, se si moltiplicano i divisori $1 \times 6 \times 6 \times 12$, si ha 432 alquanto mancante dell' omogeneo, si ha luogo fondato a sospettare, che i valori dell' incognita si tro-

vino fra i divisori minori di 41. Dividendo adunque per $x - 1$, si trova l'avanzo $- 112$, e dividendo per $x - 2$, si ha l'avanzo $+ 82$. Si scorge adunque, che uno de' valori positivi si trova fra 1, e 2. La divisione per $x - 3$ dà pure l'avanzo $+ 102$. La divisione di $x - 4$ somministra l'avanzo $- 16$, quindi si conchiude, che un altro de' valori sordi si trova fra 3, e 4. La divisione per $x - 6$ continua a dare l'avanzo negativo $- 402$. Ma perchè la divisione per $x - 12$ dà il quoziente $x^3 + 8x^2 + 8x + 567$, in cui le tre radici sono negative, e l'omogeneo è maggiore di 492, e si vede in oltre, che gli avanzi vanno sempre crescendo collo stesso segno, così si conchiude, che le altre due radici della proposta equazione sono immaginarie.

Importa quì notare che, qualora le radici dell'equazione sono sorde, se ne debbono cercare i limiti col dividere sempre l'equazione proposta per varie semplici, in vece che, quando i valori sono razionali, si divide solamente una volta l'equazione proposta, e le altre divisioni si fanno su i quozienti esatti, che risultano.

70. Volendo approssimare i limiti delle radici sorde, allorchè sono fra essi più lontani di un' unità, basterà valersi nella divisione dei numeri interposti ai ritrovati limiti, ancorchè questi numeri non sieno divisori dell' omogeneo, e quest' operazione si potrà praticare sempre nella stessa maniera, qualunque sia il grado, cui trovasi elevata l' incognita.

Dell' equazione

$z^3 - 14z^2 + 52z - 50 = 0$ si sono trovati (§. 69) i seguenti limiti 1, e 2, 2, e 5, 5, e 10. Affine pertanto di approssimare maggiormente i limiti 2, e 5 del secondo valore, si divida l' equazione proposta per uno de' numeri interposti ai limiti 2, e 5, e per esempio per $z - 3$, e si troverà l' avanzo $+ 7$, vale a dire positivo, come è succeduto nel dividere per $z - 2$; si passi pertanto a dividere per $z - 4$, e si troverà l' avanzo negativo $- 2$. Perciò si dirà, che i limiti più approssimati della seconda radice sono 3, e 4.

Per approssimare maggiormente i limiti 5, e 10 della terza radice, si userà pure un numero interposto a questi due, e per esempio, si dividerà la proposta

equazione per $z - 6$, e s'avrà l'avanzo $- 26$ pure negativo, come è succeduto nella divisione per $z - 5$; si divida adunque per $z - 7$, e s'avrà l'avanzo $- 29$; si divida per $z - 8$, e si trova l'avanzo $- 18$, il quale, siccome isminuisce, dimostra, che il numero 8 s'accosta al limite ricercato. Si divida per $z - 9$, e si trova l'avanzo positivo $+ 13$; onde si conchiude, che la terza radice ha i numeri 8, e 9 per i limiti più approssimati.

71. Affine di approssimare maggiormente i limiti ritrovati nell'antecedente paragrafo, si farà uso de' decimali nella maniera stessa, che si sono adoperati i numeri interi. Suppongasi, che dell'equazione $z^3 - 14z^2 + 52z - 50 = 0$ si debbano approssimare maggiormente i limiti 1, 2 del primo valore, si rifletta per ciò, che le differenze incontratesi negli avanzi delle divisioni per $z - 1$, e per $z - 2$ indicano, che il valore di z sia più vicino di 2, che di 1, perchè l'avanzo $+ 6$ proveniente dal divisore $z - 2$ è minore dell'avanzo $- 11$ proveniente dal divisore $z - 1$. Si divida adunque per $z - 1.6$, e si ha di

quoziente $z^2 - 12.4z + 32.16$ coll'avanzo $+ 1.456$; e siccome quest' avanzo ha il segno diverso dall' altro $- 11$, così converrà dividere per $z - 1.5$, e si avrà di quoziente $z^2 - 12.5z + 33.25$ coll' avanzo $- 0.125$. Si conchiude adunque, che i limiti più approssimati del primo valore sono 1. 5, e 1. 6, e che il valore della radice dee essere più vicino al primo limite.

Per approssimare maggiormente i limiti 3, e 4 del secondo valore, e sparmiare nel tempo stesso i tentativi inutili, si rifletta, che nel limite 3 si ha l'avanzo $+ 7$, e che nel limite 4 si ha l' avanzo $- 2$, la qual cosa dimostra, che il valore dell' incognita è assai più vicino di 4. Dividasi adunque l'equazione per $z - 3.7$, e si troverà l' avanzo $+ 1.393$. Dividasi per $z - 3.8$, e s' avrà l' avanzo $+ 0.312$. Dividasi per $z - 3.9$, e s' avrà l' avanzo $- 0.821$. Si scorge adunque, che i limiti più approssimati pel secondo valore sono 3. 8, e 3. 9, e che esso valore è più vicino del primo limite.

Per approssimare maggiormente i limiti 8 e 9 del terzo valore, si ri-

fletta, che nel primo si ha l' avanzo — 18, e che nel secondo si ha l'avanzo + 13, onde si argomenta, che il terzo valore dell' incognita è più vicino del limite 9. Si divida per z — 8. 6, e s'avrà l' avanzo — 2. 184. Si divida per z — 8. 7, e s'avrà l'avanzo + 1. 243; e però si conchiude, che i limiti più approssimati pel terzo valore sono 8. 6, e 8. 7, essendo esso valore più vicino del secondo limite.

Se poi in vece di una cifra decimale se ne scriveranno due, tre ec., s' approssimerà sempre più il valore dell' incognita; per esempio se s'approssimeranno maggiormente i due limiti 1. 5, e 1. 6 collo scrivere due cifre decimali, si troverà, che il primo valore è fra i due limiti 1. 50, e 1. 51 assai più vicino al secondo limite.

72. La maniera di trovare i valori dell' incognita col provare vari divisori nei casi, ne' quali non hanno luogo le combinazioni (§ 64), riuscirà più pronta, ognorachè l' equazione proposta indicherà d' essere stata prodotta da componenti di grado superiore al primo; e per esempio se non apparirà l' incognita

lineare, si potrà tentare la divisione a dirittura per l' incognita elevata al secondo grado accoppiata con uno de' divisori dell' omogeneo. Se non apparirà nè l' incognita lineare, nè il suo quadrato, si potrà tentare la divisione a dirittura per un' equazione semplice del terzo grado, e così successivamente.

Nell' equazione
$y^5 - 15y^4 - 9y^3 + 105y^2 + 270 = 0$
non comparendo l' incognita lineare y, si tenterà la divisione per y^2 più, o meno uno de' divisori dell' omogeneo. Col dividere per $y^2 - 9$, si trova il quoziente esatto $y^3 - 15y^2 - 30 = 0$, onde si comincierà già ad avere due valori di $y = \pm 3$.

Nell' equazione
$z^8 - 10z^7 + 50z^6 - 8z^5 + 80z^4 - 490z^3 + 720 = 0$ non apparisce l' incognita lineare, nè il suo quadrato, perciò si potrà tentare a dirittura la divisione per un' equazione semplice del terzo grado. Se questa divisione si tenterà per $z^3 - 8 = 0$, s' avrà di quoziente esatto
$z^5 - 10z^4 + 50z^3 - 90 = 0$; onde si comincierà ad avere un valore di $z = 2$.

Del divisato quoziente esatto si potrà pure tentare la divisione per un' altra equazione del terzo grado, o per una del secondo grado, e così di altri casi.

73. Occorrendo, che l' equazione proposta fosse derivativa, ed avesse più di tre termini, si trasformerà a norma dell' (§ 33); dopo del che si tratterà la trasformata a seconda de' casi, ai quali apparterrà, e dopo d'avere trovato il valore dell' incognita nella trasformata, si troverà poi il valore della prima incognita.

Sia proposta l' equazione derivativa $x^9 - 30x^6 + 41x^3 + 1080 = \emptyset$. Si trasformi, facendo $x^3 = y$, e s' avrà $y^3 - 30y^2 + 41y + 1080 = \emptyset$, e operando in questa a tenore delle date regole, si troveranno le tre componenti $y - 27 = \emptyset$, $y - 8 = \emptyset$, $y + 5 = \emptyset$, e sostituiti questi valori nell' equazione $x^3 = y$, s'avrà $x^3 = 27$, $x^3 = 8$, $x^3 = -5$, e quindi i valori dell' incognita saranno $x = 3$, $x = 2$, $x = \sqrt[3]{-5}$, e così di altre.

Prima però di trasformare le equazioni derivative, che hanno quattro, sette, o otto termini, conviene osservare se esse appartengono a qualche-

duna delle formole comprese dal § 23 sino al 29, poichè in questo caso se ne può sparmiare la trasformazione, ed avere i valori dell' incognita con gran semplicità.

Abbiasi l' equazione derivativa $y^{12} - 25y^{10} - 256y^8 + 6419y^6 - 475y^4 - 4864y^2 + 121600 = 0$, si scorge facilmente, che questa appartiene al §. 27), onde si trova, che le sue componenti sono $y^6 + 19 = 0$, $y^4 - 256 = 0$, $y^2 - 25 = 0$, la prima delle quali ha i sei valori immaginarj, la seconda sommministra due valori reali $y = \pm 4$, essendo immaginarj gli altri due, e dalla terza si ricava $y = \pm 5$.

74. Termineremo questo capo col far osservare che, qualora s' incontrano rotti in un' equazione, e che nel farli sparire l' omogeneo riesce molto composto, e richieggonsi molti tentativi per ottenere i valori dell' incognita, si può in molti casi abbreviare assai l' operazione, senza che ciò cagioni divarj di conseguenza.

Dell' equazione di secondo grado $x^2 - 10x + 21 = 0$ i valori dell'incognita sono 3, e 7. Si moltiplichi quest'

equazione per $x - 9$, e s'avrà l'equazione di terzo grado $x^3 - 19x^2 + 111x - 189 = 0$. Se l' omogeneo di quest' equazione s' accresce di un' unità, s' avrà l' equazione $x^3 - 19x^2 + 111x - 190 = 0$, in cui i valori dell' incognita sono necessariamente accresciuti di una quantità molto picciola, per cui diventano irrazionali. Per trovare i limiti di questi valori si divida l' equazione $x^3 - 19x^2 + 111x - 190 = 0$ per $x - 9$, e s' avrà di quoziente $x^2 - 10x + 21 = 0$ coll' avanzo $- 1$. Dividasi la stessa equazione per $x - 10$, affine di avere l' altro limite del valor maggiore, e s' avrà pure di quoziente $x^2 - 9x + 21 = 0$ coll' avanzo $+ 20$, vale a dire, che la radice maggiore è molto vicina a 9. E usando i decimali, si trova, che questa radice è tra 9, e 9. 1 più vicina al primo limite.

Si scorge adunque che, se in vece di aggiugnere un' unità all' omogeneo s' aggiugnerà solamente un rotto, l' alterazione, che quest' aggiunta cagionerà ne' valori dell' incognita, riuscirà ancora meno considerabile. Per esempio se s' abbia l' equazione $z^3 - 40z^2 + 108z$

$-\frac{7845}{8} = \varnothing$, se in vece di far sparire il rotto si farà l'attuale divisione dell' omogeneo, s'avrà di quoziente $980.\frac{5}{8}$, e però, se in vece di questo numero si scriverà 981, le radici dell' equazione $z^3 - 40z^2 + 108z - 981 = \varnothing$ saranno accresciute di una quantità così picciola, che nell' applicare la soluzione dei problemi alla pratica si potrà in molti casi prescindere dal divario, che s'incontra tra le radici di quest' equazione, e quelle, che s'otterrebbero dall' equazione $z^3 - 40z^2 + 108z - \frac{7845}{8} = \varnothing$

8 64 512

trasformata, e maneggiata in tutto il rigore geometrico.

Questi divarj riescono poi ancora di minor conseguenza a misura, che l'omogeneo sarà maggiore, o che l'equazione sarà elevata a maggior grado.

75. Se in vece di accrescere di un' unità l' omogeneo, s' accrescerà nella stessa equazione il coefficiente del penultimo termine, il divario nei valori dell' incognita sarà più sensibile, e riu-

scirà più considerabile esso divario a misura, che s'accrescerà della stessa quantità il coefficiente di un termine più vicino alla massima potestà dell'incognita.

Se nell'equazione
$x^3 - 19x^2 + 111x - 189 = 0$ s'accrescerà di un' unità il coefficiente del secondo termine, come $x^3 - 20x^2 + 111x - 189 = 0$, si troverà, che la radice maggiore è accresciuta considerabilmente, giacchè trovasi fra $x = 12$, ed $x = 13$, e che le altre due sono pure state alterate a segno da non potersene prescindere.

Queste riflessioni bastano, perchè l'Analista possa regolarsi con cognizione di causa, allorchè nella pratica cerca di abbreviare le sue operazioni, e che non abbisogna di una gran precisione nei valori, che ricerca.

CAPO V.

Risolvere i problemi numerici di grado superiore, le di cui equazioni finali sono affette in una maniera qualsivoglia.

76. Tutte le equazioni finali affette di qualsivoglia grado ridurre si possono ai quattro seguenti casi.

1.° Qualora il membro, in cui trovansi le incognite, è una potestà perfetta, o si può rendere tale coll' aggiunta di una quantità cognita.

2.° Quando l' equazione dimostra, che le sue componenti sono di diverso grado, e che si può far uso della teoria spiegata dal (§. 23 sino al 29).

3.° Quando, non avendo luogo essa teoria, si può coi divisori dell' omogeneo fare le combinazioni descritte (§. 64)

4.° Quando non possono nemmeno farsi le divisate combinazioni. In questo caso fa di mestiere badare alle condizioni del problema, ed alla natura dell' equazione, affinchè per mezzo di queste

considerazioni si sparmi di tentare tutti i divisori dell' omogeneo.

I seguenti esempi daranno lume bastante intorno l'uso pratico di questa dottrina.

77. Un fonte somministra in ciascheduna ora un costante numero di brente d'acqua. Se da questo numero si levano cinque brente si ha un avanzo, con cui si stabilisce la seguente proporzione.

L'avanzo stà a 3, come il quadrato del numero delle brente d'acqua, che in un'ora sgorgano dal fonte, più 28 volte esso numero meno 119 stà allo stesso quadrato più 105. Cercasi quante brente d'acqua somministra il fonte in ciascheduna ora.

Se il numero ricercato sia $= x$, sarà l'avanzo $x - 5$, e quindi s'avrà la proporzione $x - 5 : 3 :: x^2 + 28x - 119 : x^2 + 105$. Facendo il prodotto de' medj, e degli estremi, e riducendo l'equazione a zero, si ha, dopo d'averne corretta l'espressione,

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 168 = 0.$$

Considerando la forma di quest' equazione si trova, ch'essa appartiene al secondo caso (§. 76), e che a te-

nore del (§. 24) si può risolvere nelle due componenti $x - 8 = \emptyset$, $x^2 + 21 = \emptyset$, la prima delle quali somministra un valore positivo dell' incognita, essendo immaginarj gli altri due.

78. Se dalla solidità di un cubo si leva il quadruplo della sua superficie, si ha un avanzo uguale a 234 meno 161 volta il lato del cubo. Cercasi il valore di questo lato.

Si chiami $= y$ il lato ricercato, sarà y^3 la sua solidità, e $6y^2$ la sua superficie, e quindi $24y^2$ il quadruplo di essa. Coll' adempiere le condizioni del problema s' avrà la seguente equazione
$y^3 - 24y^2 = 234 - 161y$,
e riducendo l' equazione a zero, si ha
$y^3 - 24y^2 + 161y - 234 = \emptyset$.

Esaminando quest' equazione, si trova, che non può appartenere ai due primi casi (§. 76). Si trovino pertanto i divisori dell' omogeneo minori di 24, giacchè le 3 radici sono positive, e s' avrà 1, 2, 6, 9, 13, 18. Si cerchi se con questi si possono fare le combinazioni descritte (§ 64), e si troverà
$2 + 9 + 13 = 24$, $6 + 9 + 9 = 24$;
ma perchè solamente coi numeri della

prima si ha $2 \times 9 \times 13 = 234$, così si dirà, che quest' equazione appartiene al terzo caso (§. 76), e che convien valersi dei divisori dell' omogeneo 2, 9, 13.

Si tenti la divisione per $y - 2$, e si ha di quoziente esatto $y^2 - 22y + 117 = 0$. Si divida questo quoziente per $y - 9$, e si ha l' altro quoziente esatto $y - 13$. Pertanto i tre valori del lato ricercato sono $y = 2$, $y = 9$, $y = 13$.

79. Un distaccamento d' Ussari scuopre in distanza di trabucchi 400 una partita nemica di fanti, che si mette a inseguire, tosto che questa prende la fuga. Cercasi il numero de' trabucchi, che scorrer debbono gli Ussari per raggiugnere l'inimico nella supposizione, che la strada da farsi da questa cavalleria stia a quella de' fanti meno 80, come la decima parte del quadrato della strada, che faranno i fanti prima di essere raggiunti, stà alla somma della strada da farsi dai due distaccamenti.

Se la strada, che faranno i fanti, sia $= z$, quella degli Ussari sarà $400 + z$; e però a tenore della condizione del problema sarà $400 + z : z - 80 :: \frac{z^2}{10}$

$: 400 + 2z$, e fatto il prodotto dei medj, e degli estremi, si ha $2z^2 + 1200z + 160000 = \frac{z^3 - 80z^2}{10}$, e facendo sparire il rotto, e riducendo l' equazione a zero colla massima potestà dell' incognita positiva, si ha l' equazione finale $z^3 - 100z^2 - 12000z - 1600000 = 0$.

Esaminando quest' equazione, si vede, che appartiene al quarto caso (§. 76). Per la qual cosa, prima di tentare i vari divisori dell' omogeneo, convien badare alle condizioni del problema, ed alla natura dell' equazione, affine di sminuire il numero de' tentamenti.

Dall' ordine de' segni si deduce, che due delle sue radici sono negative, e che una è positiva maggiore delle due negative insieme prese. E' necessario pertanto di tentare i divisori dell' omogeneo maggiori di 100 coefficiente del secondo termine, giacchè questo coefficiente esprime la differenza fra il valore positivo, ed i due negativi. Dividasi l' equazione per esempio per $z - 160$, e si ha l' avanzo $- 1984000$. Si prenda un altro divisore assai maggiore, affine di scoprire un altro limite, che ci sminui-

sca il numero delle operazioni inutili, e sia per esempio $z - 250$, e si ha l'avanzo $+ 4775000$. Il cambiamento de' segni nell'avanzo dimostra, che la radice ricercata è fra 160, e 250. Se si dividerà per $z - 200$, si troverà il quoziente esatto $z^2 + 100z + 8000 = 0$, le cui radici sono immaginarie. Si conchiude adunque, che $z = 200$ è la strada fatta dai fanti, dopo la quale sono raggiunti dagli Ussari, i quali hanno fatto il cammino di $400 + 200 = 600$ trabucchi.

80. Un Geometra dice, che aggiugnendo due miglia alla distanza, che v'è fra due villaggi, e, dopo d'aver cubata questa somma, si leva 28 miglia da detto cubo, la radice quadrata di quest' avanzo supera di 14 miglia la radice quadrata, che si cava dal cubo formato colla distanza fra i due villaggi sminuita di due miglia. Cercasi quale sia la distanza fra i due villaggi.

Sia la distanza ricercata $= x$, il cubo di $x + 2$ sarà $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, dal quale levato 28, ed estratta la radice quadrata, sarà $\sqrt{x^3 + 6x^2 + 12x - 20}$.

Il cubo di $x - 2$, sarà $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, e la sua radice quadrata sarà $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$. E però, a tenore dell' esposto del problema, sarà

$\sqrt{x^3 + 6x^2 + 12x - 20} - 14.$
$= \sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$

Si liberi l' equazione dall' assimetria, e s'avrà nella prima operazione
$x^3 + 6x^2 + 12x + 176 - 28.$
$\sqrt{x^3 + 6x^2 + 12x - 20} = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
e correggendo l' espressione, e ordinando l' equazione, s' avrà $12x^2 + 184 = 28\sqrt{x^3 + 6x^2 + 12x - 20}$.

Si quadri di nuovo ciascun membro dell' equazione, e sarà
$144x^4 + 4416x^2 + 33856 = 784x^3 + 4704x^2 + 9408x - 15680$; e riducendo l' equazione uguale al zero, sarà
$144x^4 - 784x^3 - 288x^2 - 9408x + 49536 = 0$.

Si liberi la massima potestà dell' incognita dal coefficiente, e si riducano i rotti alla minor possibile espressione, e s' avrà $x^4 - \frac{49x^3}{9} - 2x^2 - \frac{196x}{3} + 344 = 0$. Si trasformi l' equazione col moltiplicarne le radici per 9, scrivendo

$$x^4 - \frac{49x^3}{9} - 2x^2 - \frac{196x}{3} + 344 = 0.$$

9 81 729 6561

e facendo $9x = z$, s' avrà

$z^4 - 49z^3 - 162z^2 - 47628z + 2256984 = 0$, nella quale s' osservano due radici positive, e due negative, e si vede, che la somma delle prime supera di 49 la somma delle seconde. Si scrivano i divisori dell' omogeneo, e sono 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 108, 162 ec., e siccome fra essi non si scorge la maniera di fare qualcheduna delle combinazioni descritte, converrà tentare la divisione con que' divisori, che sono moltiplici di 9, giacchè le radici sono state moltiplicate per 9. Dividendo adunque per $z - 27$, si trova l' avanzo $+ 419904$, e dividendo per $z - 36$, si ha l' avanzo $- 274104$. Si scorge adunque, che una delle radici positive della trasformata è tra 27, e 36, e quindi essa radice nella equazione primaria si trova tra 3, e 4.

Si continui a dividere l' equazione per un numero moltiplice di 9 maggiore di 36, e per esempio per $z - 54$, e s' avrà il quoziente esatto $z^3 + 5z^2$

$+ 108z - 41796 = 0$. Si scorge adunque, che l' altra radice positivà è $= 6$, giacchè si ha $9x = z = 54$, onde $x = \frac{54}{9} = 6$. Le altre due radici sono immaginarie.

81. Un Banchiere impresta un milione di lire per tre anni col patto, che nel restituirli il capitale, se li pagherà l' interesse d' interesse ragguagliato in modo, ch' egli conseguisca ll. 259712 di più del denaro, che sborsa. Cercasi a quanto per cento sia ragguagliato l' interesse suddetto.

Negli Elementi dell' Algebra si è già data (§. 296) la seguente formola per li problemi di questa specie $\overline{d+1}^{\,n} = \frac{c+a}{c}$, in cui c esprime il capitale imprestato, d il tanto per cento, a il frutto, ed n il tempo. Sostituiti pertanto nella formola i dati del problema, si ha l' equazione $d^3 + 3d^2 + 3d + 1 = \frac{1000000 + 259712}{1000000}$, il di cui primo membro, essendo un cubo perfetto, appartiene al primo caso (§. 76); perciò, estratta da ambe le parti la ra-

dice cubica, si ha $d + 1 = \frac{108}{100}$, e quindi $d = \frac{8}{100}$, vale a dire, che l'interesse suddetto è regolato in ragione di otto per cento.

Volendo risolvere il problema senza estrarre la radice, converrà ridurre l'equazione a zero, e s'avrà $d^3 + 3a^2 + 3d - \frac{259712}{1000000} = 0$; e poichè la radice cubica di un millione è 100, così converrà trasformare l' equazione suddetta col moltiplicarne le radici per 100, scrivendo $d^3 + 3d^2 + 3d - \frac{259712}{1000000} = 0$

100 10000 1000000

onde facendo $100d = D$, s'avrà
$D^3 + 300D^2 + 30000D - 259712 = 0$,
la quale, essendo esaminata, si trova appartenere al quarto caso (§. 76). L'ordine de' segni dimostra, che due valori dell' incognita sono negativi, ed uno positivo minore assai dei due negativi. In oltre si osserva, che il valore positivo è quello, che serve alla soluzione del problema, e che questo valore dee, a norma de' patti, che si fanno in tali

contratti, essere minore assai di cento; onde basterà valersi dei divisori dell' omogeneo 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Se si comincia a tentare la divisione per $D - 4$, si ha l'avanzo $- 134848$, e se si divide per $D - 16$, si trova l'avanzo $+ 301184$. Si scorge adunque, che il valore ricercato è tra 4, e 16. Se si tenta la divisione per $D - 8$, si trova il quoziente esatto $D^2 + 308 D + 32464 = 0$, le cui radici sono immaginarie.

Se nell' equazione $100d = D$ si scriverà il valore di $D = 8$, s' avrà $d = \frac{8}{100}$, cioè l'interesse ragguagliato in ragione di otto per cento.

Se in vece di moltiplicare per 100 l' equazione $d^3 + 3d^2 + 3d - \frac{259712}{1000000} = 0$, si farà l'attuale divisione dell' omogeneo, s' avrà il quoziente in frazioni decimali $d^3 + 3d^2 + 3d - 0.259712 = 0$, e però converrà tentare la divisione per li decimali di due cifre. Se si dividerà per $d - 0.08$, s' avrà il quoziente esatto $d^2 + 3.08d + 3.2464 = 0$, cioè sarà l' interesse $= d$ di otto centesimi, come sopra.

Se i dati del problema fossero

$e = 1000000$, $n = 4$, $a = 215506\frac{1}{4}$,

siccome in questo caso si ha il rotto $\frac{1}{4}$, così, dopo d' avere sviluppata la formola, e sostituiti i numeri, s' avrà

$$d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1 = \frac{1000000 + 215506\frac{1}{4}}{1000000}$$

e moltiplicato il secondo membro per 4, affine di fare sparire il rotto $\frac{1}{4}$, s' avrà, dopo d' aver corretta l' espressione

$d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1 = \frac{4862025}{4000000}$,

in cui s' osserva, che il primo membro è potestà perfetta, onde appartiene al primo caso (§. 76). Si cominci a cavare la radice quadrata, e s' avrà

$d^2 + 2d + 1 = \frac{2205}{2000}$; e poichè collo schizzare il secondo membro, dividendolo per 5, si ha $\frac{441}{400}$, che è pure una potestà perfetta, così, estratta di nuovo la radice quadrata, si ha $d + 1 = \frac{21}{20}$,

e quindi $d = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}$, vale a dire, che l'interesse è regolato a cinque per cento.

Volendo risolvere il problema col discomporne l'equazione finale, converrà ridurla a zero, e s'avrà $d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d - \frac{862025}{4000000} = 0$. Siccome il denominatore dell' omogeneo non è una quarta potestà, così converrà schizzare questo rotto, finchè riesca tale; la qual cosa s'incontra nel rotto $\frac{34481}{160000}$, in cui la radice quarta del denominatore $= 20$. Si trasformi adunque l'equazione

$d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d - \frac{34481}{160000} = 0$ col moltiplicarne le radici per 20, facendo $20d = D$, e s'avrà

$D^4 + 80D^3 + 2400D^2 + 32000D - 34481 = 0$, la quale, essendo esaminata, si trova, che appartiene al quarto caso (§. 76). In quest' equazione si hanno tre radici negative, ed una positiva; i divisori dell' omogeneo sono 1, 41, 841, 34481. Si tenti la divisione per $D - 1$, e si trova il quoziente esatto

$D^3 + 81 D^2 + 2481 D + 34481 = 0.$

Sostituiscasi il ritrovato valore di $D = 1$ nell' equazione $20d = D$, e s' avrà $d = \frac{1}{20} = \frac{5}{100}$; vale a dire, che l' interesse sarà in ragione di cinque per cento.

Se si desidera una delle radici negative, si dividerà l' equazione di terzo grado per $D + 41$, e s' avrà il quoziente esatto $D^2 + 40 D + 841 = 0$, le cui radici sono immaginarie. Sostituiscasi il ritrovato valore di $D = -41$ nell' equazione $20d = D$, e s' avrà $d = -\frac{41}{20} = -\frac{205}{100}$, valore, che non serve, e che nemmeno ha luogo nei contratti.

Se si vorrà sparmiare una parte delle fatte operazioni, basterà esprimere l' omogeneo $\frac{862025}{4000000}$ in quest' altra maniera 0.21550625, e dividere l' equazione $d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d - 0.21550625 = 0$ per uno de' suoi divisori decimali, e per esempio per $d - 0.05$, e s' otterrà il quoziente esatto.

$d^3 + 4.05d^2 + 6.2025d + 4.310125 = 0$, epperò l' interesse $= d$ sarà cinque cen-

tesimi, cioè sarà ragguagliato in ragione di cinque per cento.

82. Si sono accomprati rasi 100 panno, e ciascun raso è stato pagato a un prezzo tale, che se al cubo di questo prezzo s'aggiungono lire 231. 4 si ha l'ammontare della spesa fatta. Cercasi quanto costi ciaschedun raso.

Se il prezzo di un raso di panno si chiami $= x$, sarà $x^3 + 231.\ 4 = 100x$. Si riduca l'equazione al zero, e si osservi, che, essendo quattro soldi la quinta parte di una lira, l'equazione si potrà scrivere in quest'altra maniera $x^3 * - 100x + \frac{1156}{5} = \emptyset$.

Si trasformi l'equazione col moltiplicarne le radici per 5, facendo $5x = z$, e s'avrà la trasformata $z^3 * - 2500z + 28900 = \emptyset$. Considerando l'asterisco preceduto dal segno ambiguo si trova, che l'equazione ha due radici positive, ed una negativa. Si registrino i divisori dell'omogeneo 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25 ec. e si cerchi, se con essi si può fare una qualche combinazione, e poichè si trova, che non è attuabile una tal cosa, si conchiude, che l'equazione

contiene delle radici sorde, o delle immaginarie.

Per cercare una delle radici positive si cominci a dividere l'equazione per un numero moltiplice di 5, e per esempio per $z - 10$, si troverà l'avanzo $+ 4900$; se poi si dividerà per $z - 15$, s'avrà l'avanzo $- 5225$, onde si conchiude, che un valore positivo di z è tra 10, e 15, e per conseguenza quello di x tra 2, e 3. Nella stessa maniera si troverà, che l'altro valore positivo di x è tra 8, e 9, e che il valore negativo è tra 11, e 12.

83. Due negozianti hanno posto in società un numero tale di lisbonine, che il quadrato del capitale del primo meno il prodotto di questo capitale in quello del secondo fanno 60 lisbonine; e se il cubo del capitale del primo si somma col prodotto fatto dal quadrato del capitale del secondo nei denari posti dal primo, si hanno 1666 lisbonine. Si cerca il capitale di ciascheduno.

Sia il denaro posto dal primo $= x$, e quello posto dal secondo $= y$, coll' adempiere le condizioni del problema s'avranno le due seguenti equazioni

1.ª $x^2 - xy = 60$
2.ª $x^3 + xy^2 = 1666$

Dalla prima si ricava $\frac{x^2 - 60}{x} = y$.
Sostituiscasi questo valore di y nella seconda equazione, e sarà
2.ª $x^3 + x \times \frac{x^4 - 120x^2 + 3600}{x^2} = 1666$;
e corretta l' espressione, e ridotta l' equazione al zero, sarà
$x^4 - 60x^2 - 833x + 1800 = 0$; scrivendo l' asterisco in vece del secondo termine, si trova, che l' equazione ha due radici positive, e due negative, e dalla mancanza del secondo termine si vede, che la somma delle positive uguaglia quella delle negative. Si registrino i divisori dell' omogeneo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 36, 40, 45, 50 ec., fra i quali non trovandosi maniera di fare veruna combinazione, si conchiude, che l' equazione proposta contiene delle radici sorde, o delle immaginarie.

Dall' osservare, che l' omogeneo non è molto grande, si comprende, che i valori dell' incognita esser debbono numeri piccioli; si divida adunque l' equa-

zione per $x - 1$, e s'avrà l'avanzo $+ 908$. Si divida per $x - 2$, e s'avrà l'avanzo $- 90$; si scorge adunque, che un valore positivo si trova tra 1, e 2 assai più vicino di 2. Se si tenterà la divisione per 3, 4, 5, 6, 8, 9, e 10, si troveranno avanzi negativi, i quali crescono sino a un certo segno, e indi sminuiscono; ma dividendo per $x - 11$, si ha di nuovo l'avanzo positivo 18, onde l'altro valore positivo di x sarà tra 10, e 11; se poi si fosse diviso per $x - 12$ si sarebbe avuto di quoziente $x^3 + 12x^2 + 84x + 175 = 0$; e siccome le radici di quest'equazione mutano natura, poichè sono tutte negative, mentre una esser dee positiva, si conchiude, che l'equazione contiene delle immaginarie.

Se uno dei valori positivi approssimati di x, e per esempio il limite maggiore si sostituirà nella prima equazione $x^2 - xy = 60$, s'avrà $y = \frac{121 - 60}{11}$ $= 5\frac{6}{11}$ pel capitale posto dal secondo negoziante, ed in fatti i capitali posti dai due negozianti sono

$x = \sqrt{120}$
$y = \sqrt{30}$

84. Un Acquavitaro dice, che, avendo distillato dodici brente di vino, ha ricavato un numero tale di brente d'acquavita che, aggiungendo 9 al quadrato di queste brente, e moltiplicando questa somma pel cubo d'esse brente, si ha un prodotto uguale a 64 volte lo stesso quadrato più 576. Cercasi quante brente d'acquavita abbia ottenuto il fabbricatore in questa distillazione.

Se il numero ricercato si chiami $=x$, sarà per la condizione del problema $\overline{x^2 + 9} \times x^3 = 64x^2 + 576$, e facendo l'attuale moltiplica, e riducendo l'equazione a zero, si ha $x^5 + 9x^3 - 64x^2 - 576 = 0$, la quale appartiene al secondo caso (§. 76), epperò, valendosi della teoria (§. 24), si risolve nelle due componenti $x^3 - 64 = 0$, $x^2 + 9 = 0$, e quindi si ha $x = 4$, essendo immaginarj gli altri quattro valori dell'incognita.

85. Evvi il piano inclinato AB lungo piedi 1448. Una lepre parte dal sito B, e cammina verso A in modo, che nel primo minuto s'avanza cinque piedi, FIG. P.

nove nel secondo minuto, tredici nel terzo, e proseguisce il suo camminare coll' accrescimento di quattro piedi in ciaschedun minuto successivo. Alla sommità A del piano evvi una sfera, la quale comincia a rotolare verso B tosto che la lepre principia a muoversi. Il rotolare di questa sfera segue con legge tale, che nel primo minuto scorre un piede, ne scorre otto nel secondo minuto, ventisette nel terzo, e continua a così rotolare con maggior prestezza secondo i cubi corrispondenti ai numeri naturali. Cercasi dopo quanti minuti la sfera incontrerà la lepre.

Si chiami $= x$ il numero de' minuti, che ognuno di questi due mobili impiega dall' instante, che principia a muoversi, finchè segua l' incontro. Siccome la lepre nel suo camminare forma una progressione aritmetica crescente, il cui primo termine $= 5$, il denominatore $= 4$, ed il numero de' termini $= x$, sarà la somma, o dicasi la strada fatta dalla lepre nell' istante, che incontra la sfera, espressa per $2x^2 + 3x$.

Allorchè si considera la serie formata dai cubi dei numeri naturali, la quale prin-

cipia dall' unità, si trova, che la somma d' essi cubi corrispondente al numero $= x$ si esprime per $\frac{x}{2} \times \overline{x+1}$ elevato al quadrato, cioè per $\frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}$; e siccome questa somma esprime anche il cammino scorso dalla sfera, e che questo cammino unito alla strada fatta dalla lepre formano nell' istante dell' incontro la lunghezza del piano inclinato, così s' avrà l' equazione

$\frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4} + 2x^2 + 3x = 1448$, e facendo sparire il rotto, e riducendo l' equazione a zero, sarà

$x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 12x - 5792 = 0$, equazione, che appartiene a uno dei due ultimi casi (§. 76). L' ordine de' segni dimostra, che tre valori sono negativi, ed uno positivo, e che questo è minore di due unità della somma dei tre negativi. Esaminando poi i divisori dell' omogeneo, non si trova la via di fare le combinazioni descritte (§. 64): e però il problema appartiene al quarto caso; onde convien tentare la divisione per due numeri distanti, affine di avere

due limiti d' una radice. Dividendo per $x - 1$, si trova l' avanzo $- 5768$, e dividendo per $x - 10$, si ha l' avanzo $+ 7228$. Si scorge adunque, che il valore positivo si trova tra 1, e 10. Se si dividerà per $x - 8$, s' avrà il quoziente esatto $x^3 + 10x^2 + 89x + 724 = 0$, e però sarà $x = 8$ il valore positivo. Se si vorranno avere gli altri valori negativi, si tenteranno altre divisioni, e si troverà, che uno di questi è sordo, e che i suoi limiti sono 9, e 10, essendo questo valore assai più vicino al primo limite, e che gli altri due valori sono immaginarj.

86. Caio accompra una cassina pel prezzo di ll. 36000. Per pagare questa somma assegna per anni cinque una rendita annua di ll. 8000 su i monti, affinchè si soddisfaccia agli interessi, e col di più si sconti una parte del suo debito. Si addimanda a quanto per cento dee regolarsi l' interesse, affinchè nel terminare del quinto anno sia esattamente pagato il debito.

Negli elementi dell' Algebra si è già data la formola per li problemi di questa specie, in cui, se si sostituiranno

i dati, si verrà in cognizione di quanto ricercasi, operando a norma de' (§§. 81, 82). Per la qual cosa si dà quì un' altra maniera per risolvere questo problema.

Sia il prezzo della cassina $= c$, la rendita, che si assegna, $= r$, e sia il tanto per cento $= y$, sarà $c + y$ il debito in fine del primo anno, che chiameremo $= x$, dal quale levando la rendita $= r$, sarà $x - r$, il debito in principio del secondo anno; e poichè l' interesse da pagarsi dee essere proporzionale al debito restante, così, per avere il debito cogl' interessi in fine del secondo anno, si farà l'analogia $c : x :: x - r$ stà al debito in fine del secondo anno $= \frac{x^2 - rx}{c}$, da cui levando la rendita $= r$, si ha $\frac{x^2 - rx}{c} - r = \frac{x^2 - rx - rc}{c}$ pel debito in principio del terzo anno. Si faccia un' altra analogia

$$c : x :: \frac{x^2 - rx - rc}{c} : \frac{x^3 - rx^2 - rcx}{c^2}$$

quantità, che esprime il debito in fine del terzo anno, da cui levando la rendita $= r$, si ha pel debito restante in principio del quarto anno $\frac{x^3 - rx^2 - rcx - rc^2}{c^2}$

si faccia di nuovo quest' altra analogia

$$c : x :: \frac{x^3 - rx^2 - rcx - rc^2}{c^2} : \frac{x^4 - rx^3 - rcx^2 - rc^2x}{c^3}$$

per avere il debito in fine del quarto anno, dal quale levando la rendita assegnata, si riduce il debito in principio del quinto anno alla seguente espressione

$$\frac{x^4 - rx^3 - rcx^2 - rc^2x - rc^3}{c^3},$$

e facendo ancora la seguente analogia

$$c : x :: \frac{x^4 - rx^3 - rcx^2 - rc^2x - rc^3}{c^3} : \frac{x^5 - rx^4 - rcx^3 - rc^2x^2 - rc^3x}{c^4}$$

si ha il debito in fine dell'anno quinto, dal quale levando la rendita assegnata, si ha

$$\frac{x^5 - rx^4 - rcx^3 - rc^2x^2 - rc^3x - rc^4}{c^4}$$

ma perchè in quest' ultimo sconto si termina di pagare esattamente il debito, così sarà

$$\frac{x^5 - rx^4 - rcx^3 - rc^2x^2 - rc^3x - rc^4}{c^4} = \emptyset,$$

e moltiplicando per c^4, sarà

$$x^5 - rx^4 - rcx^3 - rc^2x^2 - rc^3x - rc^4 = \emptyset,$$

in cui sostituendo i dati del problema, s' avrà $x^5 - 8000x^4 - 288000000x^3 - 103680000000000x^2 - 373248000000000000x - 1343692800000000000000 = 0$, equazione, che facilmente si scorge essere divisibile per 4000; onde facendo $\frac{x}{4000} = z$, s' avrà $z^5 - 2z^4 - 18z^3 - 162z^2 - 1458z - 13122 = 0$, nella quale si osserva una sola radice positiva maggiore delle quattro negative insieme prese.

Esaminando quest' equazione si trova, che appartiene al quarto caso (§. 76); e provando i divisori dell' omogeneo si trova, che la radice positiva è sorda, ed è posta fra 9, e 18, vicinissima però a 9. Coll' approssimare questi numeri risulta, che il valore positivo è fra 9, 4, e 9, 5, e se questi limiti si vorranno approssimare maggiormente, si troverà, che essi sono 9, 44, e 9, 45, e che il valore di z è molto vicino al primo limite.

Sostituiscasi questo valore di z nell' equazione $z = \frac{x}{4000}$, e s' avrà

$9.44 \times 4000 = x = 37760$, e poichè

questo numero esprime il capitale, e l'interesse in fine del primo anno, se da questo si leverà il capitale 36000, s'avrà l'interesse 1760. Instituiscasi ora l'analogia

$$36000 : 1760 :: 100 : \frac{1760 \times 100}{36000} = 4\frac{8}{9},$$

vale a dire, che quest' interesse è regolato in ragione di $4\frac{8}{9}$ per cento in circa.

87. Per esprimere con una formola il metodo tenuto nel risolvere l'antecedente problema, si consideri, che in fine di ciaschedun anno, dopo d' aver difalcato la rendita dal debito, questo si trovi affatto estinto, se questa espressione si moltiplicherà per $x - c$, s'avrà come segue:

In fine del primo anno $\overline{x - r} \times \overline{x - c}$ $= x^2 \overline{- r - c} \times x + rc = \varnothing.$

In fine del secondo $\overline{x^2 - rx - rc} \times \overline{x - c}$ $= x^3 \overline{- r - c} \times x^2 + rc^2 = \varnothing.$

In fine del 3.° $\overline{x^3 - rx^2 - rcx - rc^2} \times \overline{x - c}$ $= x^4 \overline{- r - c} \times x^3 + rc^3 = \varnothing.$

Del 4.° $\overline{x^4 - rx^3 - rcx^2 - rc^2x - rc^3} \times \overline{x - c}$
$= x^5 - \overline{r - c} \times x^4 + rc^4 = 0$

Del 5.° $\overline{x^5 - rx^4 - rcx^3 - rc^2x^2 - rc^3x - rc^4} \times \overline{x - c}$
$= x^6 - \overline{r - c} \times x^5 + rc^5 = 0$

Da. ciò si scorge, che le equazioni come sovra moltiplicate hanno sempre tre soli termini, il primo de' quali è l' incognita elevata a un grado di più del numero degli anni, che il secondo termine ha sempre il coefficiente negativo, formato questo dalla somma del capitale, e della rendita, che l' incognita in questo termine è elevata al grado indicato dal numero degli anni, e che l' omogeneo è sempre positivo, ed è formato dalla moltiplica della rendita nel capitale elevato alla potestà indicata dal numero degli anni.

E però, se il numero degli anni si chiami $= n$, s' avrà quest' altra formola generale

$x^{n+1} - \overline{r - c} \times x^n + rc^n = 0$.

88. L' impresaro delle miniere dice, che ha ricavato un certo numero d' oncie d' oro di maniera che, sommando la quarta potestà di questo numero con 8 volte il suo quadrato più 875

oncie, e moltiplicando questa somma per lo stesso quadrato, si ha un prodotto uguale a quello, che s' ottiene sommando il settuplo d' essa quarta potestà con 181 volta il quadrato del numero ricavato più 1000, e dopo d' aver moltiplicato questa somma pel numero ricercato, si levino dal prodotto oncie 7000. Cercasi quale sia il numero delle oncie ricavate.

Se il numero ricercato si chiami $= x$, s' avrà coll' adempiere le condizioni del problema.
$\overline{x^4 + 8x^2 + 875} \times x^2 = \overline{7x^4 + 181x^2 + 100} \times x - 7000$, e facendo le attuali moltipliche, e riducendo l' equazione a zero, sarà $x^6 - 7x^5 + 8x^4 - 181x^3 + 875x^2 - 1000x + 7000 = 0$, la quale essendo esaminata, si trova, che appartiene al secondo caso, e che si discompone per mezzo della teoria (§. 27, 28) vale a dire, ch' essa è prodotta dalle tre equazioni semplici $x - 7 = 0$, $x^2 + 8 = 0$, $x^3 - 125 = 0$. La prima somministra un valore di $x = 7$, la seconda ha le due radici immaginarie, e la terza dà $x = 5$, essendo immaginarie le altre due radici.

89. Si è infisso nel terreno un palo alla profondità di punti 1031 con cinque colpi di martino, e si è osservato; che in ciaschedun colpo successivo il palo s' inoltrava di meno nel terreno, di ciò fosse seguito nel colpo antecedente, e che qual proporzione aveva la seconda immersione alla prima, tale era quella dell' immersione terza alla seconda, quella della quarta alla terza, e così di seguito, e si è notato in oltre, che nell' ultimo colpo il palo si è immerso solamente 16 punti. Cercasi la legge, con cui sono seguite tutte esse immersioni in ciaschedun colpo di martino.

Se si esamina lo stato della questione, si vede tosto ch' essa è una progressione geometrica decrescente, di cui è data la somma, l' ultimo termine, ed il numero de' termini, e che col rovesciare essa progressione si ha il primo termine in vece dell' ultimo.

Presa pertanto la formola delle progressioni geometriche pel caso presente, (Elementi dell' Algebra §. 281), si ha $S = \frac{pd^n - p}{d-1}$, in cui sostituendo i numeri dati dal problema, si ha

$1031 = \frac{16d^5 - 16}{d - 1}$, e quindi $1031d - 1031 = 16d^5 - 16$, e riducendo l' equazione uguale al zero, e liberando la massima potestà dell'incognita dal coefficiente, si ha $d^5 - \frac{1031d}{16} + \frac{1015}{16} = 0$.

Per fare sparire i rotti da quest' equazione, si scrivano gli asterischi nel sito de' termini mancanti, e si ha

$d^5 \pm * \pm * \pm * - \frac{1031d}{16} + \frac{1015}{16} = 0$.

Si rifletta, che il divisore 16 del quinto termine $1031d$, essendo la quarta potestà di 2, si può moltiplicare l' equazione per 2, e trasformarla in quest' altra, facendo $2d = D$.

$D^5 - 1031\,D + 2030 = 0$. Dall' osservare l' ordine de' segni si vede, che l' equazione contiene delle immaginarie, e che la medesima appartiene al quarto caso. Converrà adunque tentare la divisione usando i primi divisori dell' omogeneo. Dividendo per $D - 2$, si trova il quoziente esatto

$D^4 + 2\,D^3 + 4\,D^2 + 8\,D - 1015 = 0$, e

sostituendo questo valore di D nell' equazione $2d = D$, si avrà $2d = 2$, e quindi $d = 1$.

Poichè l'equazione di quarto grado contiene ancora una radice positiva, converrà tentare altre divisioni per vedere se sia razionale. Se si dividerà per $D - 5$, si avrà il quoziente esatto $D^3 + 7D^2 + 39D + 203 = 0$. Sostituiscasi questo valore di D nell' equazione $2d = D$, e s' avrà $2d = 5$, e $d = \frac{5}{2}$.

Se nell' equazione di terzo grado si cercherà una delle radici negative, si troverà, ch' ella è sorda, posta fra i limiti 5, e 7, e che le altre due radici sono immaginarie.

Pertanto i cinque termini della progressione sono 16, 40, 100, 250, 625, i quali presi con ordine inverso esprimono quanto il palo siasi inoltrato nel terreno in ciaschedun colpo.

90. Dividere la data grandezza in un determinato numero di parti, che sieno in continua proporzione geometrica, delle quali la somma de' quadrati uguali un'altra data grandezza.

Sia la grandezza da dividersi $= a$

La somma dei quadrati delle parti, in cui s' intende divisa . . . $= c^2$

Il primo termine della progressione sia . . . . $= p$

Il denominatore . . . . $= d$

Il numero de' termini . . . . . $= n$

Supponghasi, che sia $n = 4$, s'avranno le due seguenti equazioni.

1.ª $p + pd + pd^2 + pd^3 = a$

2ª $p^2 + p^2d^2 + p^2d^4 + p^2d^6 = c^2$

Dalla prima si ricava

1.ª $p = \frac{a}{1 + d + d^2 + d^3}$, e quadrando, e correggendo l'espressione, si ha

$$p^2 = \frac{a^2}{1 + 2d + 3d^2 + 4d^3 + 3d^4 + 2d^5 + d^6}.$$

Dalla seconda equazione si ricava poi $p^2 = \frac{c^2}{1 + d^2 + d^4 + d^6}$. Si confrontino questi due valori di p^2, e s'avrà l' equazione finale.

$$\frac{a^2}{1 + 2d + 3d^2 + 4d^3 + 3d^4 + 2d^5 + d^6}$$

$= \frac{c^2}{1 + d^2 + d^4 + d^6}$. Si levino le frazioni, e si riduca l'equazione uguale al zero,

ordinando i termini secondo i gradi dell' incognita, e s' avrà

$$\begin{matrix} a^2 \\ -c^2 \end{matrix} \times d^6 - 2c^2d^5 \begin{matrix} + a^2 \\ -3c^2 \end{matrix} \times d^4 - 4c^2d^3$$
$$\begin{matrix} + a^2 \\ -3c^2 \end{matrix} \times d^2 - 2c^2d \left.\begin{matrix} + a^2 \\ -c^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Dall' esame di questa equazione si deduce

1.° Che l' incognita è elevata al sesto grado nel caso, in cui si cercano quattro proporzionali, e conseguentemente il massimo esponente dell' incognita si può esprimere per $2n - 2$.

2.° Che l' equazione ha un termine di più dell' esponente della massima potestà dell' incognita, e quindi il numero de' termini dell' equazione si può esprimere per $2n - 1$.

3.° Che tutti i termini di numero dispari, come sono il primo, il terzo, il quinto ec. hanno per coefficiente il quadrato a^2 col segno $+$.

4.° Che tutti i termini dell' equazione hanno per coefficiente la quantità c^2 col segno $-$, e questi termini sono moltiplicati per la serie dei numeri naturali, la quale nella massima potestà dell' incognita principia dall' unità, e

va sino al termine di mezzo, dopo il quale decresce collo stesso ordine, finchè nel giugnere all'omogeneo ritrovasi ridotta all' unità.

Siccome queste quattro proprietà s'incontrano precisamente, allorchè si divide la quantità a in cinque, in sei, in sette, in otto ec. parti continuamente proporzionali, così si conchiude, ch' esse proprietà sono generalissime per tutti i casi, ne' quali si cerca di dividere una grandezza in un numero di parti continuamente proporzionali, delle quali la somma de' quadrati uguagli un' altra data grandezza. E però servono esse proprietà a stabilire una formola per tutti i casi.

91. Per applicare la data regola (§. 90) a qualche caso particolare, supponghasi, che la quantità $= a = 31$ si debba dividere in cinque parti continuamente proporzionali, delle quali la somma dei quadrati sia $= c^2 = 341$, sarà in questo caso il massimo esponente dell' incognita $2n - 2 = 8$, ed il numero de' termini dell' equazione $= 2n - 1 = 9$; sostituiscansi i numeri della formola, scrivendo 961 pel quadrato di 31, e s'avrà

$$\left.\begin{matrix}961\\-341\end{matrix}\right\} d^8 - 2\times 341 d^7 + \left.\begin{matrix}961\\-3\times 341\end{matrix}\right\} d^6$$
$$-4\times 341 d^5 + \left.\begin{matrix}961\\-5\times 341\end{matrix}\right\} d^4 - 4\times 341 d^3$$
$$+\left.\begin{matrix}961\\-3\times 341\end{matrix}\right\} d^2 - 2\times 341 d + \left.\begin{matrix}961\\-341\end{matrix}\right\} = 0,$$

e correggendo l' espressione, sarà

$$620d^8 - 682d^7 - 62d^6 - 1364d^5 - 744d^4 - 1364d^3 - 62d^2 - 682d + 620 = 0,$$

e dividendo tutta l' equazione per 31, si ha

$$20d^8 - 22d^7 - 2d^6 - 44d^5 - 24d^4 - 44d^3 - 2d^2 - 22d + 20 = 0,$$

e liberando la massima potestà dell' incognita dal coefficiente, si ha

$$d^8 - \frac{22d^7 - 2d^6 - 44d^5 - 24d^4 - 44d^3 - 2d^2 - 22d + 20}{20} = 0,$$

e trasformando l' equazione col moltiplicare le radici per 20, facendo $20d = D$, si ha $D^8 - 22D^7 - 40D^6 - 17600D^5 - 192000D^4 - 7040000D^3 - 6400000D^2 - 1408000000D + 2560000000 = 0$, equazione, che appartiene al quarto caso (§. 76). Considerando il numero 31, che si vuole dividere, e la somma dei quadrati 341 delle sue parti, si vede facilmente, che il valore del denominatore non può essere molto grande, e però si comincierà a tentare la divisione

per 2 moltiplicato per 20, giacchè le radici di quest' equazione sono state moltiplicate per 20, dividendo per D — 40, si trova di quoziente esatto
$D^7 + 18D^6 + 680D^5 + 9600D^4 + 192000D^3 + 640000D^2 + 19200000D - 640000000 = 0$; e poichè $D = 20d$, sara $\frac{40}{20} = d = 2$.

Ritrovato il denominatore $= 2$, sostituiscasi questo nella formola $S = \frac{pd^n - p}{d - 1}$ per avere il valore del primo termine $= p$, e sarà $31 = \frac{32p - p}{2 - 1} = 31p$, e quindi $p = 1$, onde le cinque parti saranno

Prima	1
2.ª .	2
3.ª .	4
4.ª .	8
5.ª .	16
	31

Praticando la stessa norma si risolverà qualunque altro problema di questa specie; non potendosi intorno a ciò incontrare altro divario, se non se nel calcolo più, o meno lungo.

FINE DEL LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO

Della Dottrina generale delle Linee Curve.

92. La dottrina generale delle curve, di cui imprendiamo a trattare, trae la sua origine, ed i progressi suoi dalla teoria delle sezioni coniche, ed in fatti, qualora s'osserva la genesi d' esse sezioni, ed il metodo, con cui se ne sono scoperte le diverse proprietà, s'arriva facilmente a conoscere le maniere generali, colle quali si produce un numero infinito di curve diverse, e la norma da praticarsi per iscoprire la natura di ciascheduna in particolare, costruirle, e risolvere con esse i problemi di qualsivoglia grado.

93. Gli antichi Geometri inventarono poche curve, ciascheduna delle quali ha conservato il nome del suo inventore, come sono la Cissoide di Diocle, la Concoide di Nicomede, la Quadratrice di Dinostrate, la Spirale d'Archimede ec.; ma i moderni hanno stabiliti i metodi generali, per mezzo de' quali s'arriva a

inventare un numero innumerabile di curve di specie, ed ordine diverso, e di scoprirne facilmente le proprietà principali.

PRENOZIONI.

94. Le curve regolari si distinguono in *Geometriche*, *Meccaniche*, ed *Organiche*.

Si chiamano geometriche, o algebraiche quelle, che per esprimerne la natura, o equazione non è necessaria veruna rettificazione, o quadratura di altra curva, come sono le sezioni coniche, ed altre di simil sorta.

Si dicono meccaniche, o trascendentali quelle altre curve, la di cui natura, o equazione dipende dalla rettificazione, o quadratura di qualche altra curva, cioè, che si suppone di poter assegnare una linea retta uguale a una curva proposta, o una superficie rettilinea uguale a una proposta curvilinea, o mistilinea.

Finalmente si chiamano organiche quelle linee, che non si possono altrimenti descrivere, se non se col mezzo di più punti.

Affine poi di individuare una curva qualsivoglia non è in alcun modo necessario apporvi un nome, ma basta assegnare la proprietà, o equazione, che ne esprime la natura.

95. Fra le linee, che servono a esprimere la natura di una curva, si chiamano *Costanti* quelle, il di cui valore non si può mutare in quella tale curva, come sono gli assi, i diametri, i parametri, ed altre linee di simil sorta; e si dicono *Variabili* quelle altre linee, che nella medesima curva ammettono diversi valori, come sono le ordinate, e le ascisse.

Nelle equazioni algebraiche, che si addurranno per esprimere la natura di una qualche curva, s'intenderà sempre, che la lettera y esprime l'ordinata della curva, x la corrispondente ascissa, p il parametro, e che le prime lettere dell'alfabeto a, b, c, d additano assi, o diametri.

96. Le curve si distinguono in *ispecie*, *ordini*, o *gradi*. Il massimo esponente di una delle variabili, o la somma massima d'essi esponenti, se le variabili sono moltiplicate fra loro, ad-

dita il grado, o l'ordine della curva, così si dirà del secondo grado la curva, la cui equazione sia $x^2 + ax = y^2$, del terzo grado le curve delle equazioni $px^2 = y^3$, $ay^2 - xy^2 = x^3$, del quinto grado la curva dell' equazione $x^5 = ax^2y^2 - cy^4$, del settimo grado la curva, di cui l' equazione sia $x^3 y^4 = a^5c^2$, ec.

97. Si dicono della medesima specie quelle curve, le di cui equazioni variano solamente nel grado, e così sono tutte della medesima specie le curve, le quali appartengono a queste equazioni $px = y^2$, $p^2x = y^3$, $p^3x^2 = y^5$ ec., e sono esse curve altrettante parabole; così sono pure della medesima specie, e sono altrettanti cerchi le curve delle equazioni $ax - x^2 = y^2$, $ax^2 - x^3 = y^3$, $ax^3 - x^4 = y^4$ ec., e così ancora sono della medesima specie, e sono altrettante iperbole fra gli assintoti le curve delle equazioni $xy = c^2$, $x^2y = c^3$, $xy^3 = c^4$, $x^3y^2 = c^5$ ec.

98. Si chiamano *Simili* le curve della medesima specie, e dello stesso grado, le cui rette omologhe sono nella medesima proporzione, e diconsi *dissimili* le

curve, qualora le linee omologhe non hanno fra loro la medesima proporzione, quantunque siano della medesima specie, e dello stesso grado, o perchè in esse è diverso il grado, o la specie, o finalmente perchè variano tutte queste cose. Da quì ne avviene, che le additate parabole sono tutte fra loro dissimili, quantunque abbiano lo stesso parametro p, che le addotte Iperbole fra gli assintoti sono tutte fra loro dissimili, quantunque abbiano la stessa retta c per esprimere la potestà iperbolica, che gli addotti cerchi sono tutti fra loro dissimili, quantunque abbiano lo stesso diametro a, e quindi si scorge ancora, che nei cerchi di grado superiore al secondo più non sono fra loro uguali tutti i raggi del medesimo cerchio, e così si dica di altre curve.

CAPO PRIMO.

Della Genesi delle Curve di diversa specie, e di diverso grado.

99. Si è veduto nelle Sezioni coniche, che queste curve nascono nelle tre seguenti maniere:

1.° Col segare un cono in diverse inclinazioni.

2.° Con un movimento continuato.

3.° Per mezzo di molti punti segnati secondo una determinata legge, o proporzione costante.

Ora queste tre maniere servono ancora per produrre, e descrivere un numero infinito di curve geometriche, e meccaniche di differente specie, e grado.

100. Si concepirà facilmente, che si può ottenere un gran numero di curve nella prima maniera, se si riflette alla genesi dei solidi di diversa specie.

Se, dopo d'aver fissato in alto l'estremità B della retta AB, si percorra coll' altra estremità A la circonferenza di un cerchio di grado superiore al secondo, o di un' Elisse, o di

Fig. 1.

un' altra curva A C D E di qualsivoglia grado, e specie, purchè sia rientrante in se stessa, si otterrà un cono BACDE diverso dai già descritti, e tutti i coni in tal guisa formati saranno fra loro dissimili a misura, che la base curvilinea ACDE sarà di diversa specie, o di diverso grado.

Se poi in vece della retta A B si adopererà una curva qualsivoglia AKB, s' otterranno altri solidi AKBDCE denominati Conoidi, i quali saranno fra loro diversi in tante guise, quante saranno le curve differenti adoperate pel lato generatore AKB.

101. In altra maniera ancora si possono produrre molti solidi regolari.

Fig. II. Se una curva A B D rientrante, o sempre aperta da una banda faccia un' intera rivoluzione intorno al suo asse BC, lo spazio occupato in questa rivoluzione somministrerà un solido, come A B D C E M.

Fig. III. Se la curva F G si rivolgerà intorno una sua tangente GK, si produrrà un solido FGH diverso dal primo.

Fig. IV. Un altro solido pure diverso KPLR si produrrà, se la curva KP si rivolgerà intorno l' assintoto A F.

Se in vece dell'asse, tangente, o assintoto si tirerà in una positura arbitraria una retta DAD, e che intorno a questa si faccia girare una porzione BB di curva, si produrranno solidi di diversa figura ABC a misura, che la retta DAD sarà diversamente situata, e che la curva presenterà la sua convessità, o la concavità verso questa retta.

Fig. v.

102. Allorchè la curva, che s' aggira, ha un nome, il solido prodotto conserva la denominazione della curva generatrice, e così, se i solidi ABDC, FGHK sono formati dalla parabola, si denominano *Conoidi parabolici*, distinguendosi poi fra essi coll' additare il grado della curva, Se i solidi OPQ, PRQYOX, KPLR sono formati dall' iperbola, si denominano *Conoidi iperbolici*, e per individuarli fra loro si addita poi il grado della curva, e si spiega, se la rivoluzione sia succeduta intorno all' asse trasverso RO, oppure intorno al congiugato VT, o d' intorno all' assintoto AF, e così di altri.

Fig. ii, e iii.

Fig. vi, vii, e iv

La retta, intorno cui si rivolge la curva, si chiama *Asse di rivoluzione*, il quale è anche asse del solido prodotto a norma del (§ 101), in vece che, quando il solido è generato nella maniera descritta (§. 100), l'asse del conoide non può mai essere asse di rivoluzione, fuorchè il cono sia retto, e che la sua base sia il cerchio Euclideo.

103. Si scorge adunque, che se, operando nelle due descritte maniere (§. 100, 101), si adopereranno le curve di già cognite, si otterranno molti solidi fra loro diversi, ciascheduno de' quali, se verrà segato in diverse inclinazioni, produrrà nuove curve, e se col mezzo di queste curve si formeranno altri solidi, e questi saranno segati da un piano in diverse inclinazioni, si otterranno altre nuove curve, colle quali si potranno poi formare altri solidi, e da essi ricavando ancora altre curve, si potrà così procedere all'infinito nel formare nuovi solidi, e nel ricavare nuove curve da questi.

104. Importa però notare, che non da tutti i solidi dissimili, nè in tutte le sezioni fatte in inclinazioni differenti si

ricavano sempre curve dissimili, della qual cosa si ha già un riscontro nelle Sezioni coniche, ove si è veduto, che nel cono scaleno la sezione paralella alla base, e la sottocontraria producono ambedue un cerchio, e che l'elisse si ricava ugualmente dal segare un cono, e un cilindro, anzichè di regola generale si dirà:

1.° Che la sezione paralella alla base in tutti i conoidi formati a tenore del (§. 100) è sempre una curva simile a quella della base.

2.° Che in tutti i solidi formati secondo il (§. 101) la sezione perpendicolare all' asse di rivoluzione è sempre un cerchio Euclideo, e la sezione per l'asse somministra sempre la curva, che ha generato il solido.

105. La seconda maniera, con cui si generano le curve, cioè con un movimento continuato (§. 99 n. 2), è feconda non meno della prima, e si può eseguire in molte guise.

Abbiasi una curva qualsivoglia A B C D E. Sulla sua convessità, che si suppone materiale, s' applichi un filo teso attaccato nella estremità E, e si FIG. VIII

scosti l' altra estremità A del filo, tenendolo sempre ugualmente teso andando verso H; questa estremità A descriverà col suo movimento la curva AFGH chiamata *linea generata* dallo sviluppo, e la curva ABCDE si chiama la *sviluppata*, o *evoluta* della curva AFGH.

La lunghezza del filo applicato sulla curva, potendo essere uguale, maggiore, o minore della sviluppata, cagiona poi varietà nella linea dello sviluppo; onde si scorge come per mezzo della stessa curva si può produrre un numero grandissimo di linee dello sviluppo tutte fra loro dissimili a misura, che si varierà la lunghezza del filo.

106. Le parti BF, CG, DH ec. del filo scostate dalla sviluppata si chiamano *Raggi dell' evoluta*, *Raggi de' cerchi osculatori*, o *Raggi del combaciamento*.

Potendosi ciascheduna curva considerare come una linea dello sviluppo, basterà, per avere la corrispondente sua evoluta, trovare il valore del raggio osculatore a ciascun punto di curva, (lo che s' insegnerà nel Calcolo diffe-

renziale), la qual cosa ci somministra un'altra maniera per descrivere un grandissimo numero di curve affatto dissimili.

107. Se un cerchio KCIB, girando attorno il suo centro A, scorre nel tempo istesso tutta la circonferenza di un altro cerchio immobile BDNE, e nel cerchio mobile KCIB si segni a piacimento un punto B, il movimento di questo punto descriverà una curva denominata *Epicicloide*, la quale verrà rappresentata dalla linea FGBH, se i diametri BC, BN saranno uguali; e sarà l'epicicloide espressa dalla linea BMNOB, se BC sarà la metà di BN, dalla linea BPQRSTB, se il diametro BC sarà un terzo di BN, e dalla linea BZVXZY, se BC sarà maggiore di BN, verbigrazia di $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ ec.

FIG. IX

FIG. X. XI, e XII.

Da questa costruzione si scorge, che si può descrivere un numero infinito di epicicloidi tutti fra loro dissimili a misura, che il diametro del cerchio mobile avrà una ragione diversa col diametro del cerchio immobile, o che in vece del cerchio Euclideo si adopereranno altre curve, rientrante ciascuna in se medesima.

Le maniere date in questo, e nel paragrafo 105 per descrivere una curva con un movimento continuato sono generali, e facili; ma se ne danno molte altre particolari, che per brevità si tralasciano. Nelle sezioni coniche se ne sono già date due, una per descrivere la parabola, e l'altra per descrivere l'elisse. Nel seguito avremo occasione di addurne alcune altre.

108. Passando finalmente alla terza maniera, con cui si descrivono le curve, cioè col mezzo di più punti (§. 99. n. 3.); basta riflettere come per mezzo di molti punti siano state descritte le sezioni coniche, e si scorge tosto, che il numero delle curve da descriversi in questa guisa uguaglia quello delle proporzioni diverse, che immaginare si possono. Per addurne alcuni esempj, supponghasi, che la retta terminata AB sia un asse, e che sopra questo siano alzate rettangole le ordinate CD, e si faccia sempre $\overline{CD}^2$

FIGURA XIII.

$$= \frac{\overline{AB}^2 \times AC}{CB},$$ la linea ADD, che passerà per tutti i punti D, sarà una curva geometrica.

Se si tira ad arbitrio la retta AB segante in A una curva qualsivoglia AEC, e tirate diverse paralelle BC indefinite, si fa sempre BD terza proporzionale all' ordinata BC, ed al corrispondente arco AEC, la linea ADD, che passerà per tutti i punti D, sarà una curva meccanica.

FIGURA XIV.

Se, dopo d' aver situate a piacimento due curve qualsivoglia EMF, GNH, e tirata una retta GL segante esse due curve, si tirano perpendicolari, od obblique alla GL le paralelle LM, e si fa LO proporzionale di mezzo alle ordinate coincidenti LM, LN delle due curve, o in qualsivoglia altra proporzione, la linea, che passerà per tutti i punti O, sarà una curva geometrica, o meccanica, secondo che le due EMF, GNH saranno geometriche, o che una, o ambedue saranno meccaniche, e così si dirà di altre proporzioni, e combinazioni.

FIGURA XV.

109. L'equazione, che esprime la natura di una curva particolare, ci somministra mezzo facile di immaginare proporzioni diverse, dalle quali altre curve dissimili si conseguiscono, bastando per-

ciò elevare successivamente la data equazione della curva a grado superiore, osservando in questo l'omogeneità nei termini, cioè procurando, che in ciascun termine la somma degli esponenti sia sempre la stessa.

Abbiasi per esempio l'equazione $px = y^2$ della parabola apolloniana, elevando successivamente quest'equazione a grado superiore, s'avrà $p^2 x = y^3$, $p^3 x = y^4$, $p^4 x = y^5$, $px^5 = y^6$, $p^3 x^4 = y^7$, $p^5 x^3 = y^8$ ec., in somma, se m esprima l'esponente di p, n l'esponente di x, sarà $p^m x^n = y^{m+n}$ l'equazione, che esprime tutte le parabole di qualsivoglia grado all'infinito. Operando poi nella stessa maniera, si troveranno le seguenti equazioni.

Per tutti i cerchi all'infinito $x^m \times \overline{a-x}^n = y^{m+n}$

Per tutte le elissi all'infinito $\frac{p}{a} \times x^m \times \overline{a-x}^n = y^{m+n}$

Per le iperbole all'infinito rapportate ai diametri $\frac{p}{a} \times x^m \times \overline{a+x}^n = y^{m+n}$

Per le iperbole all'infinito fra gli assintoti . . . $x^m \times y^n = c^{m+n}$

e così di altre curve, delle quali sia cognita l'equazione particolare.

Si suol chiamare *prima parabola* quella di qualsivoglia grado, in cui l'ascissa è lineare, e così si chiama prima parabola cubica quella dell' equazione $p^2x = y^3$, prima parabola del quinto grado quella dell' equazione $p^4 x = y^5$, e prima parabola del grado $m + 1$ quella dell' equazione $p^m x = y^{m+1}$ ec.

110. Si dee quì notare, che in ciascun grado superiore al secondo si trova più di una curva dissimile. Per esempio due sono le parabole del terzo grado, cioè $px^2 = y^3$, $p^2x = y^3$, le quali sono fra loro dissimili. Nel quarto grado poi, quantunque s' abbiano tre equazioni, cioè $p^3 x = y4$, $p^2x^2 = y^4$, $px^3 = y^4$, e che le tre parabole, a cui esse equazioni appartengano, siano fra loro dissimili, nulla di meno la curva della seconda equazione $p^2x^2 = y^4$ è simile alla parabola del secondo grado, come si scorge facilmente estraendo la radice quadrata, da cui s'ottiene $px = y^2$.

Nel quinto grado si hanno quattro parabole $px^4 = y^5$, $p^3 x^2 = y^5$, $p^2 x^3 = y^5$, $p^4 x = y^5$, le quali sono tutte fra esse dissimili.

Nel sesto grado cinque sono le parabole fra esse dissimili, cioè $p^5 x = y^6$, $p^4 x^2 = y^6$, $p^3 x^3 = y^6$, $p^2 x^4 = y^6$, $p x^5 = y^6$, ma la seconda, e la quarta sono simili alle due del terzo grado, poichè, estraendo la radice quadrata da queste equazioni, si ha $p^2 x = y^3$, $p x^2 = y^3$, e la parabola dell' equazione $p^3 x^3 = y^6$ è simile alla parabola del secondo grado, poichè, estratta la radice cubica, si ha $px = y^2$.

Parlando poi dei cerchi, si osserva, che i due cerchi cubici dell' equazione

$x^2 \times \overline{a-x} = y^3$, $x \times \overline{a-x}^2 = y^3$ sono

bensì dissimili dall' euclideo, ma fra loro non passa altra differenza, se non se nella positura. Dei tre cerchi del quarto grado $x^3 \times \overline{a-x} = y^4$, $x^2 \times \overline{a-x}^2 = y^4$,

$x \times \overline{a-x}^3 = y^4$, il secondo è simile all'

euclideo, poichè estratta la radice quadrata, si ha $x \times \overline{a-x} = y^2$; ma gli altri due sono dissimili dai cerchi di diverso grado, e fra loro altra differenza non corre, se non nella positura.

Nell'istessa guisa si ragionerà intorno ad altre curve.

111. La soluzione di varj problemi indeterminati somministra una quarta maniera di produrre altre curve, ciascuna delle quali si può inalzare a varj gradi, come s' è fatto per le sezioni coniche.

112. Ciascheduna delle curve, di cui fin' ora abbiamo descritto l' origine, e la formazione, si chiama *Curva a semplice curvatura*, perchè tutta giace nel medesimo piano; ma altre curve si danno, le quali, avendo i loro punti in piani diversi, si chiamano *Curve a doppia curvatura*, *a tripla curvatura* ec.

Le equazioni, che esprimono la natura di queste curve debbono contenere tre, quattro ec. variabili, in vece che le equazioni, le quali esprimono la curva a semplice curvatura, ne contengono solamente due.

Per additare come si possa descrivere un numero infinito di curve a doppia curvatura, si prenda un solido curvilineo qualsivoglia prodotto in una delle maniere additate (§§. 100, 101), e fatto centro in un punto della sua su-

perficie, purchè sia fuori dell'asse d'arruotamento, si descriva sulla superficie concava, o convessa, ch'ella sia, una linea rientrante nella medesima maniera, che col compasso ordinario si descrive il cerchio euclideo, la linea in tale guisa descritta sarà una curva a doppia curvatura.

Se poi in vece del compasso ordinario si farà uso della maniera data per descrivere l'elisse sul piano, si otterrà sulla superficie del medesimo solido un' altra curva di specie diversa, e una diversità fra le curve si otterrà pure, praticando altri movimenti regolari differenti dai fin quì divisati.

I turbini di polveruzza, e di altre cose leggiere, che talvolta il vento solleva visibilmente da terra, ci danno anche un'idea delle curve, che giacciono in più piani.

113. Se poi si vorranno descrivere curve a doppia curvatura col mezzo di più punti, basterà distendere sopra un piano una curva qualsivoglia ACC a semplice curvatura, di cui AB, BC sieno le coordinate, e da ciascun punto C alzate le CD perpendicolari sul piano

Figura XVI.

ABC, si farà in modo, che ciascheduna C D abbia alla corrispondente B C, oppure all' A B, o all' arco A C una ragione costante qualsivoglia, la quale sia espressa da un' equazione superiore al primo grado; con questo mezzo si avrà la curva A D D a doppia curvatura, e potrà essere variata in altrettante guise, quante sono le ragioni diverse, che si possono immaginare fra le DC, e BC, o AB, quantunque si ritenga la medesima curva AC a semplice curvatura.

Noi tratteremo in avvenire solamente delle curve a semplice curvatura, poichè di quelle a doppia curvatura, generalmente parlando, non ne abbiamo bisogno per risolvere i problemi, che alla professione nostra si appartengono.

114. Oltre le date maniere, colle quali si formano le curve, altre maniere si danno ancora, le quali producono curve di diversa specie, e di diverso ordine, come sono *le curve catenarie*, *le elastiche*, *le velarie*, *le trattorie*, *le vorticose*, ec.

Si rinvengono le curve catenarie coll' attaccare una catena, o una corda

nelle sue estremità in modo, che queste non siano in una direzione a piombo, lasciando pendere liberamente in aria la corda; la figura, che questa acquista naturalmente, somministra la curva.

Si ottengono le curve elastiche, verbigrazia, col tirare trasversalmente una corda da cembalo tesa, e indi rilasciarla, poichè nelle molte vibrazioni, che ella fa, descrive un gran numero di curve.

Le velarie ci sono somministrate dalle diverse figure, che dà il vento alle vele quadrilatere, e triangolari delle navi, o a quelle dei molini a vento.

Si conseguiscono le trattorie collo slanciare corpi di diversa densità in direzioni obblique alla linea a piombo. Di questa specie sono le curve descritte dai proietti delle artiglierie.

Finalmente si osservano le curve vorticose in molte acque correnti. Noi tralascieremo di maggiormente internarsi in quelle altre maniere, con cui si producono le curve, per non allontanarsi troppo dal nostro oggetto; riserbandoci però, allorchè tratteremo delle sperienze Fisico-meccaniche convenienti alla pro-

fessione d'Artigliero, o d' Ingegnere, di eccitare ancora quelle riflessioni, che saranno necessarie.

CAPO II.

Della natura delle Curve Geometriche, e delle Trascendentali.

115. La teoria delle curve consiste nell' individuarne le proprietà. Nella guisa istessa, con cui nella Geometria Euclidea, e nelle sezioni coniche, dopo d' avere scoperta una proprietà, che esprime la natura di una figura, si passa a dedurre le altre proprietà spettanti all' istessa figura, così ancora si procede nella teoria delle curve. Per la qual cosa, se verrà proposto di scoprire le proprietà di una qualche curva, sarà necessario, che si cominci a cercare una di quelle proprietà, che ne esprime la natura, e saremo certi di avere scoperto questa tale proprietà, ognivoltachè per mezzo di essa potremo descrivere la curva, od un' altra simile alla proposta.

In questo capo si ha in mira di mostrare solamente come s' arrivi a trovare una proprietà, che addita la natura di una proposta curva. Nel calcolo differenziale, e nell' integrale si darà il metodo per trovarne le altre proprietà principali, come sono le tangenti, le sottotangenti, le normali, le sottonormali, e come si giunga a rettificare una curva, a quadrare le superficie ec. Il che tutto si farà con grande facilità, e prestezza per mezzo del detto calcolo, in vece che penosissima, e lunga al sommo riuscirebbe una tale indagine, se procedere si volesse coi metodi antichi.

116. La maggior parte delle curve può avere assi, e diametri, ed alcune anche un assintoto. Altre curve poi, che *Spirali* si chiamano, sono senz' asse, e senza diametro, e si aggirano attorno ad un centro, da cui s' allontanano, o si avvicinano di continuo. Altre poi, come sono gli Epicicloidi, possono avere un asse, e si aggirano intorno ad un centro, da cui ora s' allontanano, ed ora s' avvicinano.

In tutte le curve si possono assegnare ascisse, e ordinate. Le prime possono essere rette, o curve, ma le seconde, finchè si può, debbono per maggiore semplicità essere rette. In oltre le ordinate possono essere fra loro paralelle, o essere, come le PG, nella curva GG tutte dirette a un medesimo punto P, che *Centro*, *Ombellico* o *Polo* della curva si chiama.

FIGURA XVII.

117. Una curva può essere sempre concava, o sempre convessa da una banda, o essere in parte concava, ed in parte convessa, come la BCD. In questo caso il punto C, ove cessa la concavità, e principia la convessità, si chiama *Punto d' inflessione.* Se poi la curva concava, o convessa, che ella sia, sempre cammina per un certo tratto da A verso H, e giunta in H torna in dietro verso F, il punto H, ove la curva cessa d' avanzarsi verso G, ed in cui principia a retrocedere, si chiama *Punto del ritorno.*

FIGURA XVIII.

Per conoscere da qual banda una curva volge la sua concavità, o convessità, si tiri a piacimento una retta DF, e tirate le paralelle AD, BE, CF,

FIGURA XIX.

che seghino la retta DF, e la curva ABC, si tiri un'altra retta AC, la quale segherà la BE in un punto G, se questo punto G cadrà tra B, ed E, la porzione di curva ABC sarà concava verso E, ma sarà convessa, se il punto G cadrà al disopra di B, come sarebbe in H.

118. A due casi si può ridurre il problema di trovare in una curva proposta una qualche proprietà, che ne esprima la natura. Il primo caso è, quando è già nota la natura della curva, o pure si sa, come essa sia stata formata. Ha luogo il secondo caso, quando ci viene presentata la curva senz' altra notizia, o pure di essa sono date solamente alcune sue linee in lunghezza, e posizione, come occorre nella maggior parte delle sperienze Fisico-meccaniche degli Artiglieri, nelle osservazioni astronomiche, ec.

119. Cominciando dalla soluzione dei problemi appartenenti al primo caso (§. 118), suppongasi, che la curva proposta KAN sia prodotta dal segamento di un solido DKENL, la di cui specie, e natura ci sia nota, e per

FIGURA XX.

esempio, che questo solido sia il cono DLE formato dalla retta DL che fissa in L ha scorso coll' altra estremità D la periferia dell' elisse appoloniano DKEN, il cui asse maggiore è la retta DE, e che questo cono sia stato segato paralellamente al lato DL dal piano KAN.

Per trovare la natura della curva KAN convien supporre, che il cono sia anche segato da un piano, che passi per l' asse d' esso cono, e per quello dell' elisse, onde si abbia il triangolo per l' asse DLE, che taglia ad angoli retti nella AH il piano KAN, e bisogna supporre in oltre, che il cono sia segato da un altro piano BGCO paralello alla base, il quale interseca il piano KAN nella OG, sarà esso piano BOGC un elisse simile, e similmente posto all' altro DNEK (§. 104 n.° 1). Si chiami M l' asse minore dell' elisse DNEK, ed m l' asse minore dell' elisse BOGC, di cui BC è l' asse maggiore, sarà nell'elisse BOGC, $BF \times FC : \overline{FG}^2 = \overline{BC}^2 : m^2$; onde $\frac{BF \times FC \times m^2}{\overline{BC}^2} = \overline{FG}^2$. Per

la medesima ragione nell' elisse DENK avremo $DH \times HE : \overline{HK}^2 = \overline{DE}^2 : M^2$, e quindi $\frac{DH \times HE \times M^2}{\overline{DE}^2} = \overline{HK}^2$, dal che si ricava

$$\frac{BF \times FC \times m^2}{\overline{BC}^2} : \overline{FG}^2 = \frac{DH \times HE \times M^2}{\overline{DE}^2} : \overline{HK}^2,$$

e permutando

$$\frac{BF \times FC \times m^2}{\overline{BC}^2} : \frac{DH \times HE \times M^2}{\overline{DE}^2} = \overline{FG}^2 : \overline{HK}^2,$$ ma

per costruzione abbiamo $BF = DH$ per cagione del paralellismo delle rette DL, HA; e perchè i due elissi sono simili si ha anche $\frac{m^2}{\overline{BC}^2} = \frac{M^2}{\overline{DE}^2}$, adunque sostituendo questi valori uguali nell'analogia, sarà $BF \times FC \times \frac{m^2}{\overline{BC}^2} : BF \times HE \times \frac{m^2}{\overline{BC}^2} = \overline{FG}^2 : \overline{HK}^2$, e scancellando le quantità uguali $BF \times \frac{m^2}{\overline{BC}^2}$, sarà $FC : HE$

$= \overline{FG}^2 : \overline{HK}^2$, ma per causa dei triangoli simili AFC, AHE, si ha FC : HE = AF : AH, adunque AF : AH $= \overline{FG}^2 : \overline{HK}^2$, proprietà, che addita la natura della curva NAK, che facilmente si potrà esprimere con un' equazione algebraica.

Una breve riflessione fatta intorno la scoperta proprietà basta per conoscere, che questa curva è la parabola appoloniana, già altrove ricavata dal segamento del cono, che ha per base il cerchio euclideo.

120. Dal metodo tenuto nell' antecedente paragrafo, ed è questo lo stesso, che si è praticato nelle Sezioni coniche, si ricava la seguente regola generale.

Per trovare la natura di una curva prodotta dal segamento di un solido, conviene prima d' ogni cosa conoscere la natura di questo solido, indi si cercherà d' intersecare il piano segante, che produce la curva, intersecarlo, dissi, con altri piani di figura già nota, ed in una posizione pure cognita, come sono

quelli, che passano per l'asse del solido, e quegli altri, che sono paralelli alla base, o che intersecano l'asse di esso solido ad angoli retti (§. 104), affinchè dalla cognizione delle linee, che si producono nelle intersecazioni di questi piani colla curva, si venga a scoprirne una qualche proprietà, o relazione.

121. Discorrendo delle curve prodotte da un moto continuo, supponghasi, che un segno A, scorrendo sopra un piano, descriva una curva ABC tale, che da un suo punto qualsivoglia B tirata alla KL la perpendicolare BK, questa abbia una ragione costante colle KE, K D ordinate coincidenti delle due curve geometriche cognite EG, DF, le quali sono ambedue date di posizione. Si cerca quale sia la natura della curva ABC.

Figura XXI

Questo problema, essendo espresso in una maniera generale, ammette non solo varietà nella natura delle curve cognite, ma ancora diverse combinazioni nella positura delle medesime; perlochè, affine di cominciare dalle cose più semplici, risolveremo nel seguente paragrafo il problema in alcuni casi particolari, e

da quanto si dirà sarà facile il formarsi una regola generale per queste scoperte.

122. Suppongasi in primo luogo, che le due curve cognite siano il cerchio euclideo LEGM, e la parabola appoloniana LDF, il di cui parametro sia uguale al diametro LM del cerchio, e sia LM anche asse della parabola, che ha il vertice in L, e suppongasi, che l' ordinata BK della curva ABC descritta dal movimento del divisato segno sia sempre terza proporzionale dopo KE, KD, cioè $\div$ KE : KD : KB, sarà per la natura del cerchio $KE = \sqrt{LK \times KM}$, e per la natura della parabola sarà $KD = \sqrt{LK \times LM}$, e però, sostituendo questi valori nell' analogia suddetta, avremo $\div \sqrt{LK \times KM} : \sqrt{LK \times LM} : KB$, e per conseguenza $KB \sqrt{LK \times KM} = LK \times LM$, e quadrando da ambe le parti, sarà $\overline{LK}^2 \times \overline{LM}^2 = \overline{KB}^2 \times LK \times KM$, e $\overline{KB}^2 = \frac{LK \times \overline{LM}^2}{KM}$, equazione che addita la natura della curva ABC. Per esprimere in valori analitici quest'equa-

FIGURA XXII.

zione, si chiami LM $= a$, KB $= y$, LK$= x$, sarà KM $= a - x$, sostituiscansi questi valori nell' equazione suddetta, e s' avrà $y^2 = \frac{xa^2}{a-x}$ per la natura della curva LABC, la quale è concava verso LM da L in B, ove l'ordinata KB passa pel centro K del cerchio, e riesce poi convessa verso LM nella rimanente porzione da B verso C.

FIGURA XXIII.

Se si supporrà, che il vertice H della parabola HDF sia distante dal punto L, che è l' estremità del diametro LM del cerchio, e sia come prima il parametro della parabola $=$ LM $= a$, e si chiami HL $= c$, l'ascissa LK $= x$, l'ordinata KB $= y$, sarà HK $= c + x$, e KM $= a - x$; e però nel cerchio LEGM avremo KE $= \sqrt{ax - x^2}$, e nella parabola HDF s' avrà KD $= \sqrt{ac + ax}$, e quindi sarà $\div$ KE : KD : KB $= \sqrt{ax - x^2}$: $\sqrt{ac + ax}$: y, onde $y = \frac{ac + ax}{\sqrt{ax - x^2}}$, e quadrando, sarà $y^2 = \frac{a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2}{ax - x^2}$, equazione, che esprime la natura della curva ABC.

Se della data curva E G l'equazione fosse $a^3 = x^2 \times EK$, e dell' altra DF l'equazione fosse $m^2 a^3 = x^4 \times KD$, chiamando $LK = x$, $KB = y$, e l' ordinata K B della proposta curva A B C fosse proporzionale di mezzo fra le due K E, K D, sarà ∺ KE : KB : KD, o sia ∺ $\frac{a^3}{x^2} : y : \frac{m^2 a^3}{x^4}$, e però $y^2 = \frac{m^2 a^6}{x^6}$, e $y^2 x^6 = m^2 a^6$, ed estratta la radice quadrata, sarà $yx^3 = ma^3$ equazione della curva proposta ABC, e così dicasi di altre combinazioni.

FIGURA XXIV.

123. Dal punto A della retta A H, che colla H I forma angolo, parte un segno, il quale, scorrendo sopra un piano, descrive la curva AEC tale, che da qualsivoglia suo punto E, essendo tirata la retta E F paralella alla HI, si ha sempre una data ragione costante colla corrispondente ordinata FP, o con un' altra variabile della curva cognita A P H. Trovare la natura della curva E A C.

FIGURA XXV.

Questo problema espresso in una maniera generale ammette molte combinazioni. Per risolverlo in qualche caso particolare suppongasi, che l' angolo

A H I sia retto, che la curva A P H sia il cerchio euclideo del diametro A H, e che F E sia sempre quarta proporzionale dopo le tre rette H F, A F, P F, s'avrà H F : A F = P F : F E, ma F P $= \sqrt{HF \times FA}$ per la natura del cerchio, adunque sarà $HF : AF = \sqrt{HF \times FA} : FE$, ed $FE = \frac{AF \sqrt{HF \times AF}}{HF}$, e quadrando, sarà

$$\overline{FE}^2 = \frac{\overline{AF}^3 \times HF}{\overline{HF}^2} = \frac{\overline{AF}^3}{HF}$$, equazione,

che esprime la natura della curva A E C denominata la *Cissoide* di Diocle.

Per esprimere analiticamente quest' equazione, sia $EF = y$, $AH = a$, $AF = x$, sarà $FH = a - x$, e sostituendo questi valori, avremo $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$. Nell' istessa guisa si opererà, se la curva APH sarà diversa dal cerchio Euclideo, o che la FE dovrà avere una proporzione diversa dell' anzidetta. Dal che si scorge, che le specie delle Cissoidi sono di numero infinito, non meno che il grado di ciascheduna specie.

La curva APH, qualunque ella sia, si chiama la *Generatrice della Cissoide.*

124. Se due rette CP, EB si segano ad angoli retti in A, ed applicato nel punto A il centro del cerchio CDPE, si faccia scorrere il cerchio col suo centro lungo la linea EB, e nel tempo istesso un'altra retta indefinita PQ fissa in P, arruotandosi intorno il punto P, passi sempre pel centro del cerchio, dimodochè in qualsivoglia punto F della retta EB si trovi esso centro, la PQ sia sempre nella positura PF, succederà, che questa retta segherà il cerchio nei punti G, H, la positura de' quali varierà di continuo, e la progressiva mutazione di queste due intersecazioni servirà a descrivere due curve CHM, PGN, la prima delle quali si chiama *Concoide superiore*, e l'altra *Concoide inferiore*, delle quali P è il polo, ed AB l'assintoto. L'invenzione di questa curva si attribuisce a Nicomede, il quale se ne serviva per trovare geometricamente due proporzionali di mezzo a due rette date.

FIGURA XXVI.

Siccome AP può essere uguale, maggiore, o minore del raggio AC

del cerchio, così, se sarà $AP = AC$, le concoidi superiore, e l'inferiore si diranno *Concoidi ordinarie*. Se $AP > AC$, le concoidi si chiameranno *Dilatate*, e si diranno *Ristrette*, o *Abbreviate* le concoidi, se $AP < AC$.

Per avere l'equazione di una delle concoidi, e per esempio della superiore CHM, dal punto H si tiri HK parallella alla AB, ed HB perpendicolare alla stessa AB, e si chiami $AC = FH = a$, $BH = AK = y$, $AP = c$, $AB = KH = x$, sarà $PK = c + y$. I triangoli simili FBH, PAF somministrano $BH : HF = AP : PF$, cioè $y : a = c : \frac{ac}{y}$, e quindi sarà $PH = HF + PF = a + \frac{ac}{y} = \frac{ay + ac}{y}$. Nel triangolo rettangolo PHK si ha $\overline{PH}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KH}^2$, ossia in valori analitici

$$\frac{a^2y^2 + 2a^2cy + a^2c^2}{y^2} = c^2 + 2cy + y^2 + x^2,$$

e facendo sparire il rotto, e ordinando l'equazione per y, sarà

$$y^4 + 2cy^3 + c^2y^2 - 2a^2cy = a^2c^2$$
$$\quad + x^2y^2$$
$$\quad - a^2y^2$$

equazione per la concoide superiore in generale, e si supporrà $a = c$, sarà $y^4 + 2ay^3 + x^2y^2 - 2a^3y = a^4$, equazione per la concoide ordinaria.

Facendo poi un ragionamento simile all' antecedente, si troverà per la concoide inferiore in generale l' equazione

$$y^4 - 2cy^3 + c^2y^2 + 2a^2cy = a^2c^2$$
$$\quad + x^2y^2$$
$$\quad - a^2y^2$$

e per la concoide ordinaria inferiore

$$y^4 - 2ay^3 + x^2y^2 + 2a^3y = a^4.$$

125. Fin adesso abbiamo adoperato il metodo sintetico per iscoprire la natura di una curva, bisogna ora vedere come si possa adoperare il metodo analitico in quest' indagine.

Della linea geometrica B M N è dato di posizione il suo asse BT, l'equazione della linea, ed il punto P fuori di essa. Inoltre si suppone che, movendosi la retta PM intorno al polo P, fa scorrere sull' asse BT il piano BMF paralellamente a se medesimo, onde sega l'asse B T in diversi punti F, e la linea BMN in diversi punti M, da ciò ne avviene, che nella successività dei punti M si descrive una curva CMD.

FIGURA XXVII.

Cercasi la natura di questa curva, supposto, che la parte BF dell' asse sia una costante.

Suppongasi, che il piano BMF sia giunto in bmf, sarà F f = B b, poichè per condizione del problema FB = fb, cioè è una costante, si chiami FB = a, PT = c, e tirata dal punto M la MQ perpendicolare all' asse BT, ed MO paralella allo stesso asse, sia QM = OT = y, MO = TQ = x, QB = t, sarà PO = $c + y$, FQ = $a - t$. Dai triangoli simili POM, FQM si ha PO : OM = QM : FQ, o sia $c + y : x = y : a - t$, perciò sarà $xy = ac - ct + ay - ty$, equazione generale. Ora, se in quest' equazione si sostituirà il valore di t ricavato dalla data equazione della linea geometrica BMN, s' avrà l' equazione ricercata per esprimere la natura della curva CMD.

Per esemplificare, suppongasi in primo luogo, che la linea geometrica BMN sia una linea retta, la di cui equazione sia $nt = my$, sarà $t = \frac{my}{n}$, e sostituendo questo valore nell' equazione canonica, s' avrà

$xy = ac - \frac{cmy}{n} + ay - \frac{my^2}{n}$ per l'equazione, che esprime la natura della curva CMD.

Suppongasi in secondo luogo, che la linea geometrica BMN sia il cerchio euclideo, di cui FB sia il raggio, e KB il diametro, sarà $BQ \times QK = \overline{QM}^2$ la sua equazione, o sia $2at - t^2 = y^2$, e trovato in questa il valore di t, sarà $t = a + \sqrt{a^2 - y^2}$; sostituiscasi questo valore di t nell'equazione canonica, s'avrà $xy = ac - ac - c\sqrt{a^2 - y^2} + ay - ay - y\sqrt{a^2 - y^2}$, o sia $xy = -\overline{c - y}\sqrt{a^2 - y^2}$, e quadrando, sarà $x^2y^2 = \overline{c^2 + 2cy + y^2} \times \overline{a^2 - y^2}$, e sviluppando i prodotti, e ordinando l'equazione per y, sarà

$$y^4 + 2cy^3 + c^2y^2 - 2a^2cy = a^2c^2$$
$$\qquad\qquad + x^2y^2$$
$$\qquad\qquad - a^2y^2$$

equazione, che esprime la natura della curva CMD, la quale, come già veduto abbiamo (§. 124), appartiene alla concoide superiore in generale.

Suppongasi in terzo luogo, che la curva BMN sia una parabola appoloniana dell'equazione $mt = y^2$, cioè il pa-

rametro $= m$, e l' ascissa BQ $= t$, sarà $t = \frac{y^2}{m}$, e sostituendo questo valore di t nell' equazione canonica, s' avrà

$$xy = ac - \frac{cy^2}{m} + ay - \frac{y^3}{m},$$ e ordinando per y, sarà

$$y^3 + cy^2 - amy = acm + mxy$$

equazione, che esprime la natura della curva CMD.

Da tutto ciò si ricava, che per iscoprire col metodo analitico la natura di una curva prodotta da un movimento cognito, basta cercare un' equazione canonica, e sostituendo in questa il valore di una delle variabili appartenenti alla linea generatrice, s' otterrà l' equazione, che esprime la natura della curva generata.

126. Le curve, di cui fin' ora abbiamo trovata l' equazione, sono geometriche, ognivoltachè le loro generatrici sono anche tali. Passiamo ora a cercare la natura delle curve meccaniche, o trascendentali (§. 94).

FIGURA XXVIII.

Se un punto A del cerchio euclideo ACD tocca in B la retta BL, e arruotandosi questo cerchio intorno al

suo centro T s' avanza nel tempo istesso verso L, esso descriverà col punto A una curva meccanica B R Q L denominata *Cicloide*, ed in ispecie si dirà *Cicloide ordinaria*, se il punto A camminerà ugualmente al punto T, dal che avviene poi, che BL sarà uguale alla circonferenza del cerchio; si dirà *Cicloide raccorciata*, se il punto A si moverà più presto del centro T, ed allora sarà B L minore della circonferenza del cerchio; e si dirà *Cicloide allungata*, se il punto A si moverà più lentamente del punto T, ed allora sarà BL maggiore della circonferenza del cerchio.

Di questi movimenti ne abbiamo un riscontro familiare nel movimento delle ruote delle carrozze, dei carri, nelle palle, che scorrono sulla tavola del Trucco, e in simili altri corpi, i quali si muovono con due movimenti, uno de' quali si fa intorno al loro asse, e l' altro si fa col trasporto di tutto esso corpo.

Il cerchio ACD si chiama *Cerchio generatore*. Per trovare la natura di questa curva, e per esempio della Cicloide ordinaria, supponga si, che il cerchio

FIGURA XXIX.

generatore sia nel mezzo E della retta BL, ed il suo diametro AE perpendicolare alla BL. Siccome per costruzione BL uguaglia la circonferenza del cerchio, così sarà LE uguale alla mezza circonferenza ADE. In questa si segni a beneplacito un punto D, dal quale si tiri la corda DE, e la retta indefinita DM paralella alla EL, e fatto EF uguale all' arco DGA, dal punto F si tiri FM paralella alla ED, cadrà il punto d' intersecazione M nella periferia LMAB della cicloide: imperciocchè, essendo nel parelellogrammo EDMF la retta MD = EF; succederà che, quando il cerchio arruotandosi da E verso L sarà giunto in F, il punto A cadrà in M. Pertanto, se l'arco AGD si chiami x, e l' ordinata corrispondente DM si dica y, avremo $x = y$ per l' equazione, che esprime la natura della cicloide ordinaria.

Questa curva ha molte belle proprietà geometriche, e meccaniche, somministrandoci fra le altre cose la teoria fondamentale pel movimento equabile degli orologi fatti a pendolo.

Se poi si vorrà l'equazione per la cicloide allungata, o raccorciata, si chiamerà EL = a, la semicirconferenza AGDE = c, e sarà $a : c = y : x$, onde $ax = cy$, equazione generale per la cicloide, servendo per l' ordinaria, per l'allungata, e per l'abbreviata secondochè c sarà uguale, maggiore, o minore di a.

Se in vece del cerchio euclideo si supporrà, che la curva generatrice sia un'altra rientrante qualsivoglia, s'avranno altre cicloidi di differente specie, ed in numero infinito.

127. Divisa in quante parti uguali si vuole BC, CD, DE la circonferenza BCDE di un quadrante del cerchio euclideo, e diviso pure il suo raggio AB in altrettante parti uguali BH, HK, KA; se dai punti di divisione H, K si tireranno le rette HF, KG paralelle alla AE, ed i raggi AC, AD, i quali intersecano le paralelle nei punti F, G, la linea, che si farà passare per li punti B, F, G, sarà una curva trascendentale denominata la *Quadratrice di Dinostrate*.

FIGURA XXX.

Per esprimere la natura di questa curva con un' equazione, si rifletta, che per costruzione l'arco B C stà alla circonferenza BCDE, come B H : B A, e però chiamando l'arco B C $= x$, la circonferenza B C D E $= c$, la parte B H $= y$, il raggio AB $= a$, sarà $x : c = y : a$, onde $a\ x = c\ y$ sarà l'equazione della curva.

Se si potesse trovare il punto L, in cui questa curva interseca il raggio AE, si verrebbe a rettificare la circonferenza del cerchio, cioè s' avrebbe una retta uguale alla circonferenza, e quindi s' avrebbe anche una superficie rettilinea uguale precisamente a quella del cerchio, il che suol chiamarsi la quadratura del cerchio.

Se in vece del cerchio Euclideo B C D E si adopererà un' altra curva per generatrice, facendo nel rimanente la stessa costruzione, la curva generata BFGL riuscirà diversa dell' anzidetta.

128. Dopo d'aver divisa la circonferenza del cerchio euclideo A B D E F in parti uguali, o disuguali come si vuole A B, B D, D E ec., e dopo d' aver tirati i raggi C A, C B, C D ec., si

FIGURA XXXI.

considera, che A sia il punto d'origine degli archi AB, ABD, ABDE, e si fa come tutta la circonferenza del cerchio sta al raggio, così l'arco AB alla parte CG del raggio, l'arco ABD alla parte CH, l'arco ABDE alla parte CI ec., la linea, che passerà per li punti C, G, H, I, K, A, sarà una curva trascendentale, denominata la *Spirale d'Archimede*, di cui ABDEF è il cerchio generatore.

Per avere l'equazione di questa curva, si chiami un'ordinata $CG = y$, l'arco corrispondente $AB = x$, il raggio del cerchio $= a$, la circonferenza $= c$, sarà $c : a = x : y$; onde $ax = cy$ sarà l'equazione della curva, e se si vorrà per tutte le spirali di grado superiore all'infinito, basterà scrivere $a^m x^n = c^n y^m$.

129. Se, dopo d'aver divisa in parti uguali, o disuguali la circonferenza ABDE del cerchio euclideo, e tirati dal centro C i raggi per li punti di divisione B, D, E ec., e supposto, che A sia il punto d'origine degli archi AB, ABD, ABDE ec., si faccia CG proporzionale di mezzo tra la circonferenza

Figura XXXII.

del cerchio, e l'arco corrispondente AB, CH proporzionale di mezzo tra la circonferenza del cerchio, e l'arco corrispondente ABD, e così si proseguisca a operare, la linea, che passerà per li punti C, G, H, I, sarà una curva meccanica denominata la *Spirale Parabolica*, le di cui ordinate partono tutte dal centro C siccome nella Spirale d'Archimede.

Per avere l'equazione, che esprime la natura della Spirale parabolica, si chiami una sua ordinata qualsivoglia $CG = y$, l'arco corrispondente $AB = x$, la circonferenza del cerchio generatore $= c$, sarà per costruzione $c : y = y : x$; onde $cx = y^2$ sarà l'equazione ricercata, la quale, se si esprimerà in quest'altra maniera generica $c^m x^n = y^{m+n}$, additerà tutte le spirali paraboliche di grado superiore all'infinito.

Se poi in vece del cerchio euclideo si adopererà un'altra curva rientrante per generatrice, si avranno altre specie di spirali diverse da questa.

130. Importa quì notare

1.° Che le ritrovate equazioni per le curve meccaniche si rappresentano

molto semplici, non ostante che per costruire esse curve sia necessario risolvere altri problemi, la qual cosa avviene, perchè nella loro costruzione si suppone, che la corrispondente generatrice sia di già rettificata, e se ne abbia il valore nella maniera più semplice, che dar si possa.

2.° Che le equazioni dei §§. 126, 127, 128 possono anche esprimere linee rette, siccome l'equazione del §. 129 può appartenere alla parabola appoloniana del parametro $= c$.

Queste due annotazioni fanno conoscere, che corre una gran differenza tra la costruzione delle curve geometriche, e quella delle curve meccaniche: imperciocchè nelle prime basta, che sia data l'equazione per poterle costruire, ma rispetto alle seconde oltre l'equazione, che ne esprime la natura, è necessario ancora, che si sappia il modo particolare, con cui è generata la curva.

131. La cognizione della genesi delle curve, di cui si è fin' ora ragionato, ha servito a scoprire col mezzo di poche riflessioni la loro natura, ed esprimerla con un' equazione: ma se della

curva proposta non si avranno altre notizie, fuorchè quelle, che si possono acquistare tirando nella medesima diverse linee, o confrontando quelle poche, che si ricavano dall'osservazione, e dalla sperienza (§. 118), in tal caso più difficile riuscirà la soluzione del problema, occorrendo talora di doverla tentare lungamente prima d'ottenerla.

Per dare adunque un indirizzo generale intorno quest'indagine, si dirà, che prima d'ogni cosa conviene esaminare attentamente la figura della curva per conoscere, se sia di quelle, che hanno assi, diametri, o semplicemente assintoti, oppure se appartiene alla cattegoria delle spirali. Dopo d'aver scoperto a quale cattegoria appartiene la proposta curva, si tireranno in essa diverse di quelle linee, pel cui mezzo veduto già abbiamo, che si giugne a trovare una qualche proprietà della curva.

Nei due seguenti paragrafi addurremo due esempi per l'intelligenza di questo indirizzo. Ciò, che si dirà nel calcolo differenziale, e nell'integrale, servirà per risolvere con mag-

giore facilità; ed universalità questi problemi non solo per le curve algebraiche, ma ancora per le trascendentali, e per le organiche.

132. Debbasi in primo luogo trovare la natura della curva KHCL distesa sopra un piano, senza avere verun' altra notizia. Si tirino le paralelle CH, FD, KL, e si divida ciascheduna pel mezzo nei punti B, E, G. Se si troverà, che questi punti sieno in diritto, la retta BEG, che passerà per essi, sarà un diametro, e sarà l'asse della curva, se l'angolo CBE sarà retto.

FIGURA XXXIII.

Riconosciuto, che la curva è della cattegoria di quelle, che hanno assi, e diametri, si considerino per ordinate le paralelle BC, ED, GL, e per ascisse le corrispondenti AB, AE, AG, e si confrontino queste coordinate fra di loro, per trovare la ragione, che corre fra esse sole, o pure combinate con qualche costante; lo scoprimento di questa proporzione sarà la natura della curva, che si potrà poi esprimere con un' equazione. Per esempio se risulta, che $\overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 = \overline{BC}^3 : \overline{ED}^3$, avremo, $\overline{AB}^2 \times \overline{ED}^2$

$= \overline{AE}^2 \times \overline{BC}^3$ per l' equazione della proposta curva.

133. Siano in secondo luogo cogniti solamente alcuni punti, e alcune linee della proposta curva, come succede nella maggior parte delle sperienze, e osservazioni Fisico - geometriche, e Fisico-meccaniche: per esempio suppongasi che, essendo stata cacciata dal sito A una palla nella direzione A B obbliqua alla linea a piombo AC, ci siano noti per mezzo dell' osservazione i punti F, G, H, per li quali è passata essa palla nel suo cammino AFGHQ, e che tutti essi punti siano in un medesimo piano verticale.

FIGURA XXXIV.

Per trovare la natura della curva descritta dalla palla, si tirino dai punti F, G, H le FD, GK, HL paralelle alla AB, e le altre rette FM, GN, HB paralelle alla AC, succederà, che essendo ADMF un paralellogrammo per costruzione, sarà AD = MF, AM = DF, e per la medesima ragione, essendo paralellogrammi AKNG, ALHB, sarà AK = GN, AN = KG, AL = BH, AB = LH, le quali rette tutte sono cognite, poi-

chè sono date di posizione le AB, AC, ed i punti F, G, H. Si considerino adunque le AD, AK, AL per ascisse, e le DF, KG, LK per le corrispondenti ordinate della curva AFGH descritta dal proietto, e si cerchi, se fra queste rette s' incontra una legge costante; e supposto, che da quest' esame risulti, che le ascisse stanno fra esse come i quadrati dei numeri naturali, mentre che le corrispondenti ordinate sono fra esse come i numeri naturali, s'avrà $AD : AK = \overline{DF}^2 : \overline{KG}^2$; onde $AD \times \overline{KG}^2 = AK \times \overline{DF}^2$, equazione, che esprime la natura della curva, la quale, per le cose insegnate nelle Sezioni coniche, si scorge essere la parabola appoloniana, di cui AC è un diametro, ed AB la tangente al vertice A d' esso diametro.

134. Termineremo questo capo col far osservare, che sebbene negli esempj addotti per iscoprire la natura di una curva geometrica siansi ottenute equazioni semplici, nulla di meno può avvenire, che per la medesima curva si ottengano due, o più equazioni fra loro

diverse, e diversamente composte, del che ne abbiamo già un riscontro nelle Sezioni coniche, e per esempio le tre seguenti equazioni $y^2 = \frac{c^2}{a^2} \times \overline{ax - x^2}$, $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, $xy = \frac{a^2 + c^2}{16}$ esprimono la medesima iperbola, e nasce tale diversità dall' essere la prima equazione rapportata agli assi, la seconda all' asse, ed al corrispondente parametro, e la terza all' assintoto.

CAPO III.

Delle Curve Organiche.

135. Le curve organiche non si possono altrimenti descrivere se non col mezzo di più punti.

Figura XXXV.

Sia BAM una retta indefinita divisa in parti uguali BD, DC, CA ec., da ciascuno di questi punti si alzino le perpendicolari BH, DG, CF, AE, le quali formino una qualsivoglia geometrica progressione decrescente da H verso E, la linea, che passerà per li punti H, G, F, E, sarà una curva

organica denominata *Logaritmica*, ed anche *Logistica.*

Dalla costruzione di questa curva si scorge facilmente, che se essa si prolungherà verso Q, s'avvicinerà sempre alla retta BM, senza però mai toccarla, poichè l'ultimo termine MQ della progressione geometrica decrescente sarà sempre una quantità assegnabile, e non potrà considerarsi per zero quest'ordinata, fuorchè il numero dei termini della progressione sia infinito, nel qual caso la retta BM diventa necessariamente di una lunghezza infinita, e forma l'assintoto della logaritmica.

Se si prenderà $BR < BH$, e si faranno i termini BR, DS, CT, AV ec. pure in progressione geometrica decrescente, in cui il denominatore sia lo stesso dell'altra progressione, s'avrà un'altra logaritmica RSTVZ, la quale da R venendo verso Z, s'avvicinerà sempre all'altra, ed alla retta MB senza però mai toccarle, fuorchè all'infinito verso Z; onde si dirà, che la curva RSTVZ sia assintoto dell'altra curva HGFEQ, e che la retta BM sia assintoto comune d'ambedue le divisate curve.

136. Essendo la logaritmica di un grand' uso nelle Matematiche semplici, e nelle composte, se ne faranno perciò osservare più minutamente le sue proprietà primarie.

Dalla data costruzione di questa curva, e dalle cose insegnate nell' Algebra intorno la formazione de' logaritmi, si raccoglie

1.° Che, se le ordinate A V, C T ec. della logaritmica si prenderanno per li numeri naturali, le ascisse corrispondenti saranno i logaritmi d' essi numeri. Per esempio, se l' ordinata A V esprime l' unità de' numeri naturali, siccome in questo caso le ascisse debbono principiare dal punto A, e prendersi le positive verso B, ove cresce la progressione, e verso M le negative, atteso, che la progressione decresce da questa parte, così l' ascissa corrispondente all' unità AV sarà zero, cioè l' unità non avrà logaritmo di sorta alcuna, ma il logaritmo del numero naturale CT maggiore dell' unità sarà espresso per l' ascissa AC, quello del numero naturale D S sarà espresso per l' ascissa AD ec., e le ordinate esistenti alla sinistra del punto

Figura XXXVI.

A, come sono le NQ, MP ec., essendo minori dell' unità A V, esprimono un rotto, e le ascisse negative A N, A M corrispondenti ai rotti N Q, M P additano i logaritmi di questi rotti.

2.° Che se l'ascissa A D sarà doppia, tripla, quadrupla ec. di AC, la corrispondente ordinata D S sarà espressa per la seconda, la terza, la quarta ec. potestà di CT, e se AE sarà $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec. di AC, la corrispondente ordinata EL sarà espressa per la radice seconda, terza, quarta ec. di CT.

3.° Che, se sia $AB = AC + AD$, sarà B R il prodotto di C T in D S, o sia quarta proporzionale dopo AV, CT, DS, vale a dire che il logaritmo di un prodotto, o di numero composto è uguale alla somma dei due logaritmi dei numeri componenti. Se poi $AC = AB - AD$, sarà CT il quoziente di B R diviso per DS, o sia quarta proporzionale dopo DS, RB, AV, vale a dire, che il logaritmo di un quoziente è uguale al logaritmo del dividendo meno il logaritmo del divisore. E siccome nei

rotti il denominatore è maggiore del numeratore, così il logaritmo di un rotto riesce necessariamente negativo.

4.° Che qualunque volta la quantità, di cui si vuole il logaritmo, è quantità infinita, siccome in questo caso l' ordinata della curva riesce infinita, così infinita ancora sarà la corrispondente ascissa, e conseguentemente infinito il logaritmo della quantità proposta, ma positivo,

5.° Che, se la quantità proposta sarà zero, il suo logaritmo sarà pure infinito, ma negativo, avvegnachè la logaritmica non può toccare l' assintoto B M se non dalla banda di M a una distanza infinita dal punto A.

137. In secondo luogo si deduce dalla data costruzione della logaritmica, che quantunque si ritenga la medesima unità AV, e le medesime divisioni uguali AC, CD, DB ec., nulla di meno, siccome le ordinate corrispondenti possono essere in una progressione geometrica qualsivoglia, così si potrà descrivere un numero infinito di logaritmiche QVTSR, HVFGK ec., le quali tutte, sebbene abbiano la stessa unità A V, e

FIGURA XXXVII.

le medesime ascisse AC, AD, AB, avranno però le ordinate coincidenti molto diverse, e quindi si vede per esempio come al medesimo logaritmo AC corrisponda un numero grandissimo di numeri naturali CT, CF fra loro ineguali.

Se poi si tira una retta RF parallella alla AB, la quale interseca in F, ed in R le due logaritmiche KGVH, RSVQ, siccome in questo caso si ha CF = RB, così si scorge ancora, come al medesimo numero naturale CF possa corrispondere un numero grandissimo di logaritmi diversi AC, AB ec.

Da queste riflessioni consegue

1.° Che, se nelle tavole trigonometriche in vece della progressione geometrica ∺ 1 : 10 : 100 ec. fosse stata presa un' altra progressione, s' avrebbero altri logaritmi corrispondenti alla serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 ec.

2.° Che, volendo servirsi dei logaritmi senza usare le tavole trigonometriche, basterà descrivere una logaritmica a piacimento, la quale dovrà poi essere sempre la stessa in tutti i confronti, che si faranno delle quantità logaritmiche, eccettuati quei casi, dei quali si parlerà appresso.

138. Per esprimere in valori analitici le divisate proprietà della logaritmica, in cui AV rappresenta l' unità de' numeri naturali, suppongasi $AC = x$, la corrispondente ordinata $CT = y$, e sia $AD = 2\,AC = 2\,x$, sarà la corrispondente ordinata $DS = y^2$. Se sia $AE = \frac{AC}{4} = \frac{x}{4}$, sarà $EL = \sqrt[4]{y}$. Generalmente se m esprime un numero qualsivoglia intero, o rotto, all' ascissa mx corrisponderà sempre l' ordinata y^m: ma l' ascissa x esprime il logaritmo di y, cioè $x = ly$, adunque sarà $2x = ly^2$, $3x = ly^3$, $\frac{x}{4} = l\sqrt[4]{y}$, $\frac{5}{7}x = ly^{\frac{5}{7}}$, $mx = ly^m$.

Siccome poi il logaritmo di un prodotto, o di numero composto è uguale alla somma dei logaritmi dei numeri componenti, e che il logaritmo di una frazione è uguale alla differenza tra il logaritmo del numeratore, e quello del denominatore (§. 136. n. 3), così sarà $ly^2 = 2\,ly$, $ly^3 = 3\,ly$, $ly^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\,ly$, $ly^m = mly$, $l\frac{1}{y^2} = ly^{-2} = -\,2\,ly$,

$l \frac{1}{y^3} = ly^{-3} = -3 ly$, $l \frac{1}{y^m} = ly^{-m} = -mly$ ec.

139. Se la circonferenza del cerchio euclideo ABDEFM si divide in parti uguali AB, BD, DE, EF ec., e considerato il punto A per l' origine degli archi AB, ABD, ABDE, si tirano i raggi CA, CB, CD per li punti di divisione, e preso il raggio CA per primo termine di una progressione geometrica decrescente qualsivoglia, si nota il secondo termine della progressione da C in G, il terzo termine da C in H, il quarto da C in I, il quinto da C in K, e così si proseguisce di mano in mano a notare gli altri termini della progressione decrescente, la linea, che passerà per li punti A, G, H, I, K ec. sarà una curva trascendentale organica chiamata la *Spirale logaritmica*, la quale farà un numero infinito di rivoluzioni intorno al centro C prima di giugnervi, poichè l' ultimo termine della progressione geometrica decrescente non può diventare zero, se non quando il numero dei termini della progressione è infinito.

FIGURA XXXVIII.

In questa curva se si considera, che le sue ordinate CA, CG, CH ec. esprimono i numeri naturali, de' quali per esempio CI sia l'unità, l'arco ED del cerchio generatore esprimerà il logaritmo del numero naturale CH, l'arco EDB esprimerà il logaritmo del numero naturale CG. Prendendo poi le ordinate minori dell'unità CI, come a dire l'ordinata CK, la quale esprime una frazione, l'arco EF sarà il suo logaritmo, il quale si considera negativo, poichè in questo caso il punto d'origine degli archi si prende in E, considerandosi positivi gli archi presi da E verso D, e negativi gli archi presi da E verso F.

Dalla data costruzione si scorge facilmente, che variandosi il denominatore della progressione, la spirale s'anderà accostando al centro con legge diversa, e che lo stesso succederà, se in vece del cerchio Euclideo si adopererà un'altra curva qualsivoglia rientrante per generatrice.

Nel calcolo differenziale si darà la maniera di trovare l'equazione, che esprime la natura di una curva organica.

CAPO IV.

Data l'equazione indeterminata di grado superiore, costruire il corrispondente Luogo Geometrico.

140. Le regole date nelle Sezioni coniche Capo VI servono precisamente per costruire le equazioni, di cui si tratta; non incontrandosi altra differenza in queste operazioni, se non quella, che nasce nel cercare i valori delle incognite elevate a grado maggiore. Per esempio, se dopo d'aver attribuito un valore arbitrario all'ascissa x, l'ordinata y si troverà elevata a grado superiore, converrà, per averne i valori, risolvere il problema del grado, cui essa y trovasi elevata. Da quì avviene poi, che alla medesima ascissa corrispondono tante ordinate, quanti sono i valori reali di y, e queste ordinate producono diversi rami nella curva, che si costruisce. Le seguenti esercitazioni renderanno familiare questo maneggiamento, nelle quali supporremo sempre ti-

FIGURA XXXIX.

rate la direttrice BC delle ascisse, BD delle ordinate, facienti l' angolo retto CBD, o quell' altro, che verrà prescritto.

141. Data l'equazione $p^2x = y^3$, descrivere il luogo geometrico.

Dopo d' aver tirate le direttrici, si supponga $x = 0$, s'avrà $y = 0$, dal che si deduce, che la curva passa pel punto d' origine B delle ascisse; e siccome nel supporre $y = 0$, si ha anche $x = 0$, si conchiude, che la curva passa pel solo punto B delle direttrici. Coll' attribuire poi diversi valori positivi BL all' ascissa x, si avranno i corrispondenti valori dell' ordinata $y = \sqrt[3]{p^2x} =$ LF, i quali vanno crescendo a misura, che s'attribuisce un valore maggiore all'ascissa, e quindi la curva si va sempre più dilatando verso C.

Se si riflette, che la proposta equazione può anche nascere da $-p^2 \times -x = -y^2 \times -y$, si vede tosto, che coll' attribuire dei valori negativi BH all' ascissa x, s' avranno le corrispondenti ordinate negative HE $= y = \sqrt[3]{-p^2x}$. Finalmente considerando, che nel trovare i valori di y si risolve un' equa-

zione pura di terzo grado, in cui si ha un solo valor reale, si vede, che a ciascheduna ascissa corrisponde una sola ordinata; onde il luogo geometrico FBE ha i due soli rami BF, BE uniti in B, ove la curva ha un punto di flesso contrario.

142. Se s'abbia l'equazione generale a tutte le parabole all' infinito $p^m x^n = y^{m+n}$, e si facciano delle riflessioni analoghe a quelle dell' antecedente paragrafo, si troverà, prendendo x per ascissa:

1.° Che il luogo geometrico interseca le direttrici nel solo punto B.

2.° Che, qualora $m+n$ esprime un numero dispari, l'ordinata $y = \sqrt[m+n]{p^m x^n}$ ha un solo valore reale, e quindi a ciascheduna ascissa corrisponde una sola ordinata; onde il luogo ha i due soli rami BF, BE uguali, i quali volgono la loro concavità verso la direttrice delle ascisse.

3.° Che, quando $m+n$ esprime un numero pari, l'ordinata y ha due valori reali uguali, cioè uno positivo, e l'altro negativo espressi per y

$= \pm \sqrt[m+n]{p^m x^n}$, e quindi il luogo geometrico ha quattro rami uguali BF, BG, BI, BE concavi verso la direttrice delle ascisse.

Se poi si noterà y per ascissa nella direttrice BC, e si prenderà x per ordinata, sarà il valore di quest' ordinata espresso per $x = \sqrt[n]{\frac{y^{m+n}}{p^m}}$, il quale avrà un sol valore reale, se n sarà un numero dispari; onde s' avrà un luogo di due soli rami uguali, i quali presenteranno la loro convessità alla direttrice CBH: ma, se n sarà un numero pari, l' ordinata x avrà due valori reali, ed uguali, cioè uno positivo, e l' altro negativo, e quindi il luogo geometrico avrà quattro rami uguali, i quali volgeranno la loro convessità verso la direttrice BC.

143. Descrivere il luogo geometrico, che appartiene all' equazione $y^3 = ax^2 - x^3$ del cerchio cubico.

Presa x per ascissa, suppongasi $x = 0$, sarà $y = 0$; onde la curva passerà pel punto d' origine B, e supposto $y = 0$, s' avrà $x^3 = ax^2$, e quindi $x = a$. Si

FIGURA XL.

tagli BL $= a$, sarà L un altro punto, per cui passerà la curva. Coll'attribuire poi diversi valori all'ascissa x minori di BL, come BK, sarà la corrispondente ordinata KF $= y = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$ valore positivo, ed il solo reale, che si compete a quest' incognita; ma, tosto che sarà $x > a$, cioè, che si prenderà un' ascissa BH maggiore di BL, allora riuscirà negativo il corrispondente valore di $y = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$ da notarsi da H in G, e questo valore crescerà a misura, che si prenderà maggiore il valore di x.

Da questa costruzione si scorge, che il luogo geometrico ha due rami ambidue concavi verso la direttrice BC, che il primo ramo BFL è limitato, e che l'altro LGE s'estende all'infinito.

Se nella proposta equazione si supporrà un'ascissa BC $= x$ infinita, siccome in questo caso il termine ax^2 riesce infinitamente picciolo rispetto all' altro x^3, così l' equazione suddetta diverrà $y^3 = - x^3$, e $y = - x$, e poichè l' ascissa è positiva, sarà $- y = x$. Pertanto, se nella direttrice BC si prende un' ascissa finita qualunque, e per esem-

pio BL $= x$, e si farà la corrisponden-
te ordinata negativa LI $=$ BL, la retta
BI prolungata sarà l' assintoto del ramo
LGE.

144. Se le equazioni date (§. 109)
per le altre sezioni coniche all' infinito,
cioè

Per i Cerchj $x^m \times \overline{a - x}^n = y^{m+n}$

Per le Elissi $\frac{p}{a} x^m \times \overline{a - x}^n = y^{m+n}$

Per le Iperbole $\frac{p}{a} x^m \times \overline{a + x}^n = y^{m+n}$

si esamineranno a norma del §. 142, si
scopriranno facilmente i sintomi, e le
mutazioni, che succedono in quelle cur-
ve di diverso grado.

145. Debbasi costruire l' equazione
$y^3 = x^3 + 2ax^2 + a^2 x$, col prendere x
per ascissa. Se si supporrà $x = 0$, sarà
$y = 0$; onde la curva passerà pel punto
B; se si supporrà $y = 0$, s' avrà
$0 = x^3 + 2ax^2 + a^2 x$, e dividendo per x,
sarà $x^2 + 2ax + a^2 = 0$, ed estratta la
radice quadrata, sarà $x + a = 0$, e quin-
di $x = - a$; perciò notata l' ascissa BL
negativa $= a$, sarà L un altro punto,
per cui passerà la curva.

FIGURA XLI.

Si assegnino diversi valori positivi all' ascissa $x = BK$, s' avrà il solo valore reale positivo della corrispondente ordinata $KE = y = \sqrt[3]{x^3 + 2ax^2 + a^2x}$, il quale crescerà a misura, che BK sarà maggiore, e quindi il ramo BE della curva si estenderà all' infinito verso C.

Si attribuiscano dei valori negativi all' ascissa x, come BH, minori di BL, s' avranno le corrispondenti ordinate HF di un sol valore reale negativo espresso per $y = \sqrt[3]{-x^3 + 2ax^2 - a^2x}$; onde si descriverà un altro ramo BFL limitato dai punti B, L. Coll' attribuire poi altri valori negativi all' ascissa x, come $BG > BL$, s' avrà il terzo ramo LIO, che si estende all' infinito verso Q.

146. Per costruire l' equazione $y^2 = \frac{a^2x}{a-x}$ prendendo x per ascissa, si trova, supposto $x = 0$, che $y = 0$; e quindi la curva passa pel punto B. La supposizione di $y = 0$ dà pure $x = 0$, onde si conchiude, che la curva interseca le direttrici in un solo punto. Si attribuiscano diversi valori positivi all' ascissa x, come BK, e s' avranno i corrispondenti valori dell' ordinata $y = \pm\sqrt{\frac{a^2x}{a-x}}$, i quali

FIGURA XLII.

saranno reali, finchè sarà $a > x$, e si noteranno i positivi da K in E, ed i negativi da K in F. Allorchè coll' accrescere il valore di x s' avrà $a = x = \text{BL}$, l' espressione $\frac{a^2 x}{a-x}$ diverrà $\frac{a^2 x}{0}$, cioè sarà y di un valore infinito additato da LH, e quindi questa retta servirà d' assintoto alla curva, la quale per un certo tratto EBF volge la sua concavità verso la direttrice BC, e nelle due rimanenti porzioni EN, FN volge la sua convessità. Questo luogo geometrico NEBFN si chiama la *Versiera.*

Se si costruirà l' equazione

FIGURA XLIII.

$y^2 = \frac{a^3 - a^2 x}{x}$, prendendo x per ascissa, si troverà un' altra specie di versiera IEGFH, alla quale la direttrice BD serve d' assintoto.

Se queste due equazioni fossero del terzo grado, come $y^3 = \frac{a^3 x}{a-x}$, $y^3 = \frac{a^4 - a^3 x}{x}$, s' avrebbero le figure ❋, e ✱ della tavola 3.a

Se si costruirà l'equazione $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, prendendo x per ascissa, e facendo delle riflessioni analoghe alle precedenti, si troverà, che il luogo geometrico passa pel punto B, ch'egli ha due rami BE, BF, i quali presentano la loro convessità alla direttrice BC, finchè le ascisse BK sono minori di BL $= a$, e che l'ordinata nel punto L diventa un assintoto de' due rami.

FIGURA XLII.

Se poi nelle addotte equazioni si prenderà y per ascissa, si troverà facilmente la figura, e positura del corrispondente luogo geometrico.

147. Data l'equazione

$z^2 = \frac{c^2x - x^3 + 2ax^2 - a^2x}{x - 2a}$, descrivere il corrispondente luogo, prendendo x per ascissa, e z per ordinata.

La supposizione di $x = 0$ somministra anche $z = 0$; onde la curva passa pel punto B. La supposizione di $z = 0$ dà $0 = \frac{c^2x - x^3 + 2ax^2 - a^2x}{x - 2a}$, ossia, corretta l'espressione, $0 = c^2 - x^2 + 2ax - a^2$, e quindi $x^2 - 2ax + a^2 = c^2$, ed estratta la radice quadrata, si ha $x - a = \pm c$, ed x

FIGURA XLIV.

$= a \pm c$. Supposto che sia $a > c$, si faccia BG $= x = a - c$ quantità positiva, e si noti BF $= x = a + c$, saranno G, F due altri punti, per li quali passerà il luogo geometrico.

Si attribuiscano diversi valori all' ascissa positiva $x =$ BL minori di BG, s' avranno le corrispondenti ordinate LE positive, ed LI negative espresse per z

$= \pm \sqrt{\frac{c^2x - x^3 + 2ax^2 - a^2x}{x - 2a}}$, e si descriverà il ramo rientrante BEGI limitato dai punti B, G. Se poi si attribuiranno all' ascissa x dei valori BQ maggiori di BG $= a - c$, e minori di BF $= a + c$, si troverà, che i valori corrispondenti di z sono immaginarj, perchè la quantità sotto il segno radicale riesce negativa; ma, se si attribuiranno all' ascissa dei valori BH maggiori di BF, s' avrà di nuovo positiva la quantità sotto il segno radicale, e quindi s' avranno le corrispondenti ordinate positive, come HK, e le negative uguali HM; onde si descriveranno i due altri rami FK, FM, i quali volgeranno la loro convessità verso la direttrice FC. Final-

mente, se coll'accrescere il valore di x si farà $x = 2a = BN$, l'espressione dell'ordinata NO diverrà

$$z = \pm \sqrt{\frac{c^2a - a^3 + 2a^3 - a^3}{2a - 2a}} = \pm \sqrt{\frac{c^2 a}{0}},$$

cioè l'ordinata riuscirà quantità infinita; onde sarà ONO l'assintoto dei due rami FK, FM.

Se poi si farà $a < c$, in questo caso l'ascissa $x = a - c$ riuscirà negativa, da notarsi da B in R, e sarà R un punto, per cui passerà il ramo rientrante BSR del luogo geometrico, che si descriverà coll'attribuire diversi valori negativi alle ascisse BT minori di BR, e s'avranno le corrispondenti ordinate $TS = z = \pm \sqrt{\frac{-c^2x + x^3 + 2ax^2 + a^2x}{-x - 2a}}$, le quali diverranno immaginarie, tosto che si darà un valore negativo all'ascissa x maggiore di BR.

148. Descrivere il luogo appartenente all'equazione $x^3 + yx^2 + c^2y = a^3$, prendendo x per ascissa. Suppongasi $x = 0$, l'equazione proposta diverrà $c^2y = a^3$, e quindi l'ordinata corrispondente

FIGURA XLV.

al punto B origine delle ascisse sarà $y = \frac{a^3}{c^2}$, onde si taglierà $BM = \frac{a^3}{c^2}$. Si supponga $y = 0$, l'equazione proposta diverrà $x^3 = a^3$, ed $x = a$; epperò, fatto $BG = a$, sarà G un altro punto della curva. Coll' attribuire poi diversi valori positivi BL all' ascissa, s' avranno le corrispondenti ordinate $y = \frac{a^3 - x^3}{c^2 + x^2}$, le quali saranno positive da B in G, come LK, stantechè $x < a$, e riusciranno negative da G verso C, come LE, poichè in questo caso riesce $x > a$, e quindi negativa l' espressione $\frac{a^3 - x^3}{c^2 + x^2}$.

Se poi si attribuiranno diversi valori negativi BH, BQ all' ascissa x, l' espressione per le corrispondenti ordinate diverrà $y = \frac{a^3 + x^3}{c^2 + x^2}$, dimodochè la curva s' accosterà alla direttrice CBQ per un certo tratto da M in F, indi se ne allontanerà sempre più, andando verso R, a misura che l' ascissa BQ crescerà, e il ramo MFR volgerà la sua convessità verso la direttrice GBQ, mentre l' altro ramo MKGE presenta la sua concavità.

149. Costruire l'equazione $y^2 + 2ay = \frac{a^5}{x^3}$, prendendo x per ascissa.

Si supponga $x = \varnothing$, sarà $\frac{a^5}{\varnothing}$ una quantità infinita, e quindi nel risolvere l'equazione di secondo grado $y^2 + 2ay = \frac{a^5}{\varnothing}$

s'avrà l'espressione $y = -a \pm \sqrt{\frac{a^5}{\varnothing} + a^2}$,

nella quale i termini $-a$, a^2 scompariranno per essere infinitamente piccioli rispetto al termine $\frac{a^5}{\varnothing}$, e l'ordinata y nel punto B origine delle ascisse diverrà infinita, vale a dire che BD sarà un assintoto del luogo geometrico, che si descrive. Suppongasi $y = \varnothing$, sarà

FIGURA XLVI.

$x^3 = \frac{a^5}{y^2 + 2ay} = \frac{a^5}{\varnothing}$ pure quantità infinita, e quindi x espresso nella BC prolungata all'infinito diverrà un altro assintoto. Si attribuiscano diversi valori arbitrari, e positivi all'ascissa $x = BL$, s'avranno, col risolvere l'equazione $y^2 + 2ay = \frac{a^5}{x^3}$, i corrispondenti valori delle ordinate

$y = - a \pm \sqrt{\frac{a^5}{x^3} + a^2}$ da notarsi i positivi $- a + \sqrt{\frac{a^5}{x^3} + a^2}$ da L in K, ed i negativi $- a - \sqrt{\frac{a^5}{x^3} + a^2}$ da L in E, e s'avranno i due rami KK, EE del luogo ricercato.

Se si noteranno da B verso S dei valori negativi di $x =$ BH, siccome l' espressione del radicale si muterà in quest' altra $\sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2}$, così la medesima riuscirà negativa, finchè sarà $x < a$, e quindi immaginario il valore dell' ordinata $y = - a \pm \sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2}$, e l' espressione diverrà $y = - a$, tosto che sarà $x =$ BO $= a$. Si noti adunque OP $= y = - a$, e si continuino ad accrescere i valori negativi di $x =$ BS; siccome in questo caso riuscirà positiva la quantità sotto il segno radicale, così

$y = -a \pm \sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2}$ saranno due valori reali, ma negativi, stantechè $\sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2} < a$, da notarsi il minore $-a + \sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2}$ da S in M, ed il maggiore $-a - \sqrt{\frac{a^5}{-x^3} + a^2}$ da S in N.

Finalmente, se col crescere il valore negativo di x s' arriverà a farlo infinito, allora il rotto $\frac{a^5}{-x^3}$ riuscirà zero, e scomparirà dal radicale; onde il valore di y sarà $-a \pm a$: e però la direttrice CBS sarà pure un assintoto del ramo MPN; e se a quest' assintoto si tirerà la paralella QFG coll' intervallo di $y = -2a$, questa paralella sarà l' altro assintoto del ramo MPN, ed anche del ramo EE, giacchè la differenza fra le ordinate LK, LE, è espressa dalla stessa quantità $-2a$.

Se si vorrà prendere y per ascissa, ed x per ordinata, dopo d' aver rico-

FIGURA XLVII. nosciuto, che BC, BD sono gli assintoti del ramo, che si vuole descrivere nell'angolo CBD, si attribuiscano diversi valori positivi BL all' ascissa y, s' avranno i corrispondenti valori dell' ordinata $LK = x = \sqrt[3]{\frac{a^5}{y^2 + 2ay}}$, i quali saranno solamente positivi, poichè nelle equazioni pure del terzo grado si ha una sola radice reale, onde si descriverà il solo ramo KK. Se poi si prenderanno dei valori negativi dell' ascissa y, come BH, siccome il termine $2ay$ muta segno, così la corrispondente ordinata HN $= x$ sarà espressa per $\sqrt[3]{\frac{a^5}{y^2 - 2ay}}$, nella quale espressione, finchè y^2 sarà minore di $2ay$, la quantità sotto il segno radicale sarà negativa, e qualora s' avrà $y^2 = 2ay$, vale a dire, che sarà $BM = 2a$, l' espressione $x = \sqrt[3]{\frac{a^5}{y^2 - 2ay}} = \sqrt[3]{\frac{a^5}{\varnothing}}$ riuscirà infinita, e quindi l' ordinata MO diverrà l' assintoto del ramo VN. Se poi s' accrescerà maggiormente il valore ne-

gativo di y, come BF, la quantità sotto il segno radicale diverrà positiva; onde s'avranno le corrispondenti ordinate FG positive, e si verrà a descrivere il terzo ramo GG del luogo geometrico, di cui saranno assintoti le MO, CBF prolungate.

150. Debbasi costruire l'equazione $y^4 - 4axy^2 - a^2y^2 + 2x^2y^2 = x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2$, prendendo x per ascissa, e y per ordinata.

Suppongasi $x = 0$, sarà $y^4 - a^2y^2 = 0$, e dividendo per y^2, sarà $y^2 = a^2$, e $y = \pm a$, onde la curva passerà per li punti C, D. FIGURA XLVIII.

Posto $y = 0$, sarà $x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2 = 0$, e dividendo per x^2, facendo passare $3a^2$ nell' altro membro, ed aggiunto il quadrato della metà del coefficiente, ed estratta la radice, s'avrà $x = 2a \pm a$; onde la curva passerà per li punti A, E. Si formi ora l'espressione pei valori di y con trattare l'equazione di quarto grado derivativa del secondo, aggiungendovi il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, s'avrà dopo estratta la radice

quadrata $y^2 = 2ax + \frac{a^2}{2} - x^2 \pm \sqrt{2x^4 - 8ax^3 + 6a^2x^2 + 2a^3x + \frac{a^4}{4}}$, e quindi $y = \pm\sqrt{2ax + \frac{a^2}{2} - x^2 \pm \sqrt{2x^4 - 8ax^3 + 6a^2x^2 + 2a^3x + \frac{a^4}{4}}}$.

Attribuiscasi ora dei valori arbitrarj alla variabile x, e s'avranno due valori immaginari, e due reali di y, uno positivo, e l' altro negativo M M, finchè sarà $x = a$; a qual punto corrisponderanno due ordinate A A, e due altre $= \emptyset$; onde la curva passerà per questo punto A; con attribuire poi alla x valori maggiori di a, e minori di $\frac{3a}{2}$, s'avranno quattro valori reali di y, due positivi, e due negativi R, Q; ed attribuendo alla x valori maggiori di $\frac{3a}{2}$, e minori di $3a$, saranno i valori di y immaginarj; ed essendo $x = 3a$, sarà $y = \emptyset$; onde la curva passa pel punto E, come si è già detto, e con dare valori

maggiori alla x, si avrà la curva E, O; con attribuire poi alla x valori negativi, si avrà il rimanente della curva N, N: onde tutta la curva della fig. XLVIII. sarà il luogo geometrico spettante all' equazione proposta.

151. Costruire il luogo geometrico appartenente all'equazione $y^5 - 15ay^4 + 75a^2y^3 - 145a^3y^2 + 84a^4y = a^3cz$, prendendo y per ascissa, e z per ordinata.

Supposto $y = 0$, sarà anche $z = 0$; onde la curva passerà pel punto B. Supponendo poi $z = 0$, l' equazione diverrà $y^5 - 15ay^4 + 75a^2y^3 - 145a^3y^2 + 84a^4y = 0$, e dividendo per y, s'avrà l' equazione del quarto grado $y^4 - 15ay^3 + 75a^2y^2 - 145a^3y + 84a^4 = 0$, i di cui valori, per le cose insegnate, saranno $y = a$, $y = 3a$, $y = 4a$, $y = 7a$. Si noti pertanto $BE = y = a$, $BF = 3a$, $BG = 4a$, $BH = 7a$, e s'avranno altrettanti punti, per li quali passerà il luogo geometrico. Coll'attribuire poi diversi valori arbitrari all' ascissa $y = BL$, s' avranno i corrispondenti valori dell' ordinata z, i quali saranno positivi, come LK, da B in E,

FIGURA XLIX.

da F in G, e da H verso C, ove la curva si protenderà poi all' infinito, e saranno negative le ordinate z = LI da E in F, e da G in H.

. Se si prescinderà dal supporre l'ordinata $z = \emptyset$, e si attribuiranno immediatamente diversi valori arbitrari all'ascissa, si troveranno le corrispondenti ordinate con un' equazione del primo grado

$$z = \frac{y^5 - 15ay^4 + 75a^2y^3 - 145a^3y^2 + 84a^4y.}{a^5 c}$$

Se si farà uso di questa osservazione nel seguente capo, si costruiranno con gran facilità, e prestezza le equazioni determinate di qualsivoglia grado.

152. Si dee quì osservare, che nel costruire i luoghi geometrici occorrono talvolta certe espressioni in forma di rotto, nelle quali, assegnando un valore all' incognita, l'espressione diventa $\frac{\emptyset}{\emptyset}$. Per esempio se nell' equazione $y^2 = \frac{a^2 - x^2}{a - x}$ si faccia $x = a$, s'avrà $y^2 = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{\emptyset}{\emptyset}$. Queste tali espressioni hanno però soventi un valore reale, e finito, come

facilmente si scorge, facendo l'attuale divisione di $a^2 - a^2$ per $a - a$, poichè si trova di quoziente $2a$, e quindi nell'attribuire all' ascissa x il valore $= a$, la corrispondente ordinata si dee esprimere per $y = 2a$. Nel calcolo differenziale si darà la regola generale per trovare il valore di somiglianti espressioni.

CAPO V.

Costruire le equazioni determinate di qualsivoglia grado superiore al quarto.

153. I problemi di grado superiore al quarto si riducono a equazione finale col praticare le regole, gl' indirizzi, ed i ripieghi additati nei precedenri Trattati. L'esempio seguente somministrerà intorno a ciò un riscontro più che bastante.

La divisione di un angolo, o del suo arco in parti uguali di numero dispari è un problema, che ascende al grado indicato dal numero delle parti, in cui si vuol dividere l'angolo, ognivoltachè l' esponente massimo dell' incognita è espresso da un numero primo, e così

il problema riuscirà del quinto grado, se l'angolo dovrà essere diviso in cinque parti, e riuscirà del settimo grado, se l'angolo dovrà essere diviso in sette parti uguali, vale a dire, che l'equazione, la quale serve per inscrivere l'eptagono regolare nel cerchio, riesce del settimo grado, che l'equazione per inscrivere l'undecagono regolare nel cerchio è dell'undecimo grado ec.

154. Debbasi dividere l'angolo AKF in cinque parti uguali.

FIGURA L.

Suppongasi, che i punti delle divisioni uguali nell'arco ACF appartenente al dato angolo sieno B, C, D, E. Si tirino le corde uguali AB, BC, CD, DE, EF, e le disuguali AC, AD, AE, AF; inoltre si prolunghi AD, e fatto centro in C coll'intervallo CA si noti il punto H, e si tiri CH. Si prolunghi pure AE, e fatto centro in D coll'intervallo DA si noti il punto I, e si tiri DI, e prolungata finalmente AF, si faccia LE = AE.

Da questa costruzione si ricava:

1.° Che i triangoli ABC, ACH, ADI, AEL sono tutti isosceli, e simili, poichè l'angolo A alla base è uguale in

tutti, giacchè per ipotesi sono uguali fra loro gli archi BC, CD, DE, EF.

2.° Che il triangolo CHD è uguale, e simile al triangolo ABC, poichè, essendo l'angolo CHD = CAD, sarà anche uguale al BAC, ed è il lato CH = AC, e finalmente, che l'angolo CDH fatto dalla corda CD, e dal prolungamento della corda AD è uguale all'angolo ABC, avvegnachè ambidue hanno per misura la metà della circonferenza AGFC, giacchè gl'interiori CAD, CDA equivagliono l'esteriore CDH. Da quì avviene, che la corda AB, la quale s'adatta tre volte nell'arco ABCD, è uguale alla retta DH.

Con un somiglievole ragionamento si proverà, che i triangoli ACD, DEI sono fra loro uguali, onde AC = EI, e che i triangoli ADE, EFL sono pure fra loro uguali, onde AD = FL.

Ciò premesso sia, come nel §. 218 Geom. solid. il raggio $AK = a$, la corda cognita $AF = c$, le corde incognite $AB = DH = y$, $AC = EI = x$, $AD = FL = z$, $AE = u$, sarà $AH = AD + DH = z + y$, $AI = AE + EI = u + x$, $AL = AF + FL = c + z$.

Dai triangoli simili ABC, ACH si deduce AB : AC : : AC : AH, ossia $y : x :: x : z + y$, e quindi $yz + y^2 = x^2$ 1.ª equazione.

I triangoli simili ACH, ADI somministrano AC : AH : : AD : AI, cioè $x : z + y :: z : u + x$, e quindi $ux + x^2 = z^2 + yz$ 2.ª equazione.

Se nella seconda equazione si sostituirà in vece di x^2 il suo valore $yz + y^2$ ricavato dalla prima, s'avrà 2.ª $ux + yz + y^2 = z^2 + yz$, e correggendo l'espressione, e trovando il valore di x, sarà $x = \frac{z^2 - y^2}{u}$.

Per trovare un altro valore di x, si consideri, che i triangoli simili ABC, AEL danno AB : AC : : AE : AL, ossia $y : x :: u : c + z$, epperò $ux = cy + yz$, e $x = \frac{cy + yz}{u}$. Si confrontino i due valori di x, e s'avrà $\frac{z^2 - y^2}{u} = \frac{cy + yz}{u}$, e corretta l'espressione, sarà $z^2 - y^2 = cy + yz$; ma si è veduto nelle Sezioni coniche (§. 218), che la corda AD di un angolo trisegato si esprime per $\frac{3a^2y - y^3}{a^2}$,

adunque, se in vece di AD $= z$ si scriverà il suo valore uguale $\frac{3a^2y - y^3}{a^2}$ nell' equazione $z^2 - y^2 = cy + yz$, s' avrà

$$\frac{9a^4y^2 - 6a^2y^4 + y^6}{a^4} - y^2 = cy + \frac{3a^2y^2 - y^4}{a^2},$$

e correggendo l' espressione, e dividendo per y, s' avrà l' equazione finale.

$$y^5 - 5a^2y^3 + 5a^4y - a^4c = 0.$$

Operando nella stessa maniera, si dividerà l' arco in sette, in undeci ec. parti uguali.

155. Supposto pertanto, che i problemi sieno stati ridotti a equazione finale, è necessario, prima di costruirla, esaminare, se si può deprimere coll' estrazione di radice, o colla divisione, usando perciò le regole date nel libro 1.° Per facilitare la pratica di queste regole addurremo alcuni esempi, principiando dalle equazioni pure, le quali si dovranno ridurre, finchè l' esponente dell' incognita sia un numero primo.

Abbiasi l' equazione $y^6 = a^4cd$, per deprimerla si trovi una proporzionale di mezzo $= m$ fra le cognite c, d, e questa si sostituisca nell' equazione, s' avra $y^6 = a^4 m^2$ onde, estratta la radice qua-

drata, sarà $y^3 = a^2 m$, in cui l'esponente dell'incognita è un numero primo.

Se l'equazione fosse $y^6 = a c d f g h$, basterà trovare delle proporzionali di mezzo da due in due alle lettere cognite, per esempio $ac = m^2$, $df = n^2$, $gh = p^2$, e sostituite queste medie nell' equazione, s'avrà $y^6 = m^2 n^2 p^2$, onde, estratta la radice quadrata, sarà $y^3 = m n p$.

Se sia data l'equazione $x^{12} = c^5 a^3 d^3 f$, si trovi una proporzionale di mezzo $= m$ tra d, ed f, un'altra tra a, e $c = n$, e s'avrà $x^{12} = c^4 a^2 d^2 m^2 n^2$, ed estratta la radice quadrata, sarà $x^6 = c^2 a d m n$, da deprimersi, come sovra, sino al terzo grado, facendo $ad = p^2$, $mn = q^2$, onde s'avrà $x^3 = c p q$.

Se sia data l'equazione $z^9 = a^6 c^2 f$, converrà abbassare quest' equazione al terzo grado col trovare due proporzionali di mezzo tra c, ed f, e chiamando la prima di queste medie $= m$, s'avrà $z^9 = a^6 m^3$, ed estratta la radice cubica, sarà $z^3 = a^2 m$.

Se l'equazione fosse $z^9 = a^2 c d f^2 g^2 h$, converrà trovare fra a, e c, fra d, ed f, fra g, ed h due proporzionali di

mezzo, e supposto, che le prime d'esse proporzionali sieno m, n, p, si sostituiranno nell'equazione, e s'avrà $z^9 = m^3 n^3 p^3$, onde, estratta la radice cubica, sarà $z^3 = mnp$.

Se l'equazione fosse $z^9 = acdfghklq$, si comincierà a trovare delle proporzionali di mezzo tra a, e c, tra f, e g, tra k, ed l, e chiamando queste m, n, p, l'equazione sarà trasformata in questa $z^9 = m^2 dn^2 hp^2 q$, da trattarsi come sovra.

Se l'equazione sia $x^{10} = a^7 c^2 f$, converrà trovare una proporzionale di mezzo $= m$ tra a, ed f, e s'avrà $x^{10} = a^6 c^2 m^2$, ed estratta la radice quadrata, sarà $x^5 = a^3 cm$, in cui essendo l'esponente un numero primo, più non si può deprimere l'equazione.

156. Se le equazioni finali saranno composte, si esaminerà pure, se si possono discomporre colla divisione, o coll' estrazione di radice, riducendole a tal fine uguali al zero.

Per esempio l'equazione $x^5 - cfx^3 - a^2 dx^2 + a^2 cdf = 0$ si può discomporre nelle due seguenti $x^3 - a^2 d = 0$, $x^2 - cf = 0$.

L' equazione $z^6 + cdz^4 - a^2c^2z^2 - a^2c^3d = 0$ si può discomporre nelle due seguenti $z^4 - a^2c^2 = 0$, $z^2 + cd = 0$, la prima delle quali si riduce a $z^2 = ac$.

L' equazione
$x^7 + \overline{a^2f + c^3} \times x^4 - d^3mx^3 + a^2c^3fx - a^2d^3fm = 0$ si discompone nelle due seguenti $x^3 \pm a^2f = 0$, $x^4 + c^3x - d^3m = 0$.

L' equazione
$y^5 - ay^4 - c^2y^3 + \overline{a^2d + ac^2} \times y^2 - \overline{acfg - a^3d} \times y + a^2cfg = 0$ è divisibile per $y - a$, e si ha di quoziente $y^4 - c^2y^2 + a^2dy - acfg = 0$.

L' equazione
$y^9 - d^2y^7 + c^2gy^6 - a^4y^5 - c^2gd^2y^4 + a^4d^2y^3 - a^4c^2gy^2 + a^4c^2d^2g = 0$ si discompone nelle tre seguenti
$y^4 - a^4 = 0$, $y^3 + c^2g = 0$, $y^2 - d^2 = 0$.

L' equazione
$z^{11} - a^2z^9 + \overline{a^2d - c^2d} \times z^8 + \overline{a^2c^2d - m^5} \times z^6 - a^2c^2d^2z^5 + a^2m^5z^4 - \overline{a^2dm^5 + c^2dm^5} \times z^3 - a^2c^2dm^5z + a^2c^2d^2m^5 = 0$ si discompone nelle tre seguenti
$z^3 - c^2d = 0$, $z^3 - a^2z + a^2d = 0$, $z^5 - m^5 = 0$.

Se dall' equazione
$x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 + c^4f^2 = 0$ si leverà la quantità $a^6 + c^4f^2$, s' avrà
$x^6 - 3a^2x^4 + 3a^4x^2 - a^6 = -a^6 - c^4f^2$, dalla quale, estraendo la radice cubica

s' avrà l' equazione depressa

$x^2 - a^2 = \sqrt[3]{-a^6 - c^4 f^2}$, e così di altre.

157. Ridotta, come sovra; l' equazione nella sua sede, se ne farà la costruzione geometrica o col mezzo di due curve, o coll' usare la linea retta, ed una curva del grado indicato dall' equazione finale.

Il metodo praticato nelle Sezioni coniche per costruire le equazioni del terzo, e quarto grado col mezzo di due curve serve anche per le equazioni di qualsivoglia grado. Per farne pratica abbiasi da costruire l' equazione finale $z^7 = a^4 c^3$. Si prenda un' equazione indeterminata arbitraria, in cui siavi z, e qualcheduna delle cognite contenute nella finale, e sia per esempio $ay = z^2$, col sostituire nella detta finale il valore di z^2, s' avrà $a^3 y^3 z = a^4 c^3$, e corretta l' espressione, sarà $y^3 z = ac^3$:

Si costruisca il luogo geometrico EHBF colle solite direttrici BC, BD, prendendo y per ascissa, e z per ordinata nell' equazione $ay = z^2$ Si costruisca pure il luogo geometrico apparte- FIGURA LI.

nente all' equazione $y^3 z = ac^3$, prendendo pure y per ascissa, e z per ordinata, s' avrà la curva GHK, la quale interseca la prima nel solo punto H; onde, tirata HL paralella alla direttrice BD, sarà $HL = z$, $BL = y$.

158. Sia proposto da costruire l' equazione finale $x^5 + a^2x^3 = a^5$. Si prenda l' equazione arbitraria $ay = x^2$, e nella proposta sostituiscasi ay in vece di x^2, s' avrà $a^2y^2x + a^3yx = a^5$, e, corretta l' espressione, sarà $y^2x + ayx = a^3$. Si costruisca l' equazione $ay = x^2$, prendendo x per ascissa, s' avrà il luogo geometrico OFBO. Si costruisca l' altra equazione $y^2x + ayx = a^3$, s' avrà un luogo geometrico, che ha tre rami, de' quali il solo EFG interseca in F il primo luogo OFBO. Tirata pertanto FL paralella alla direttrice BD, sarà BL $= x$, LF $= y$. E però riescono inutili gli altri due rami HH, II.

FIGURA LII.

159. Importa sommamente osservare, che il metodo di risolvere le equazioni coll' intersecazione di due curve non serve per tutti i casi: imperciocchè succede talora, che le due curve o non somministrano un numero d' interseca-

zioni corrispondente a quello delle radici reali dell' equazione, o somministrano valori falsi. Per dare un qualche riscontro di questi inconvenienti, sia proposto di costruire con due curve l'equazione $x^3 + a^2x - a^2f - a^3 = 0$. Si prenda l'arbitraria $y^2 = ax - af$, e si sostituisca y^2 in vece di $ax - af$, l'equazione proposta riceverà questa forma $x^3 + ay^2 = a^3$. Si costruisca quest'equazione colle note regole, prendendo x per ascissa, e s'avrà la curva LEF, che si dilata a misura, che s'avanza verso H, avendosi in questa costruzione $BL = a$,

$BE = \pm a$, $KF = \pm \sqrt{\frac{a^3 + x^3}{a}}$. Nel costruire l'equazione alla parabola $y^2 = ax - af$, la supposizione di $y = 0$ dà $0 = ax - af$, e quindi $f = x$ da notarsi da B verso C, come BG, e sarà G il vertice della parabola IGI; epperò, se sarà $f > a$, le curve non si potranno intersecare, perchè l'espressione di questa parabola ammette il solo ramo verso C, e quindi a tenore di questa costruzione i tre valori dell'incognita saranno immaginari, lo che è impossibile,

FIGURA LIII.

avvegnachè qualunque equazione di terzo grado aver dee una, o tutte e tre le radici reali. Se poi sarà $f < a$, come BM, allora la parabola OMO intersecherà la curva FEL in due soli punti N, il che non può nè meno sussistere, dovendosi avere una sola, o tre intersecazioni.

Altre volte succede poi, che le due curve s'intersecano in un numero di punti maggiore di quello, che si compete alle radici reali della proposta equazione, e che la costruzione somministra patentemente dei valori falsi, del che si possono pure addurre vari riscontri.

160. Affine di schivare gl'inconvenienti descritti nell'antecedente paragrafo, d'uopo è costruire le equazioni determinate per mezzo della linea retta, e di una curva del grado stesso, cui trovasi elevata l'equazione proposta. Questo metodo generalissimo somministra sempre fedelmente tante intersecazioni, quante sono le radici reali dell' equazione proposta, e per mezzo di queste intersecazioni s'ottengono i precisi valori dell'incognita; e occorrendo, che la retta, in vece di segare,

toccasse la curva in qualche punto, si considererà, che a questo punto corrispondono due valori reali dell' incognita fra loro uguali.

Ella è poi cosa arbitraria usare qualsivoglia delle equazioni appartenenti alla linea retta; per altro l' equazione alla paralella riesce sempre la più semplice. Per far vedere l' universalità di questo metodo, e per facilitarne la pratica, addurremo alcuni esempi, usando le diverse equazioni appartenenti alla linea retta.

161. Debbasi costruire l' equazione finale $y^3 + a^2c = 3a^2y$, si prenda l' equazione alla retta inclinata $ay = cz$, comprendendo in questa le quantità cognite dell' equazione proposta, e sostituiscasi cz in vece di ay, s' avrà l' altra equazione indeterminata $y^3 + a^2c = 3acz$, che è pure del terzo grado come la proposta. Si consideri y per ascissa, e z per ordinata, e per costruire l' equazione $ay = cz$ si faccia l' ascissa BL $= c$, l' ordinata corrispondente LK $= a$, e tirata la retta indefinita BK, questa sarà il luogo alla linea retta.

Figura LIV.

Si costruisca l' equazione $y^3 + a^2c = 3acz$. La supposizione di $z = o$ dà $y = \sqrt[3]{-a^2c}$ da notarsi da B in H. La supposizione di $y = o$ dà $z = \frac{a}{3}$ da notarsi da B in E. Coll' assegnare poi all' ascissa y dei valori positivi BF, BG, s' avranno le corrispondenti ordinate FI, GM $= z = \frac{y^3 + a^2c}{3ac}$, onde si descriverà il ramo EIQM, il quale, perchè da E in Q presenta la sua concavità alla direttrice BC, e da Q verso M presenta la sua convessità, viene in tal guisa a intersecare la retta nei punti I, M, dai quali, tirate alla BD le paralelle IF, MG, si hanno nelle ascisse BF, BG i due valori positivi di y. Coll' attribuire poi diversi valori negativi all' ascissa y, s' avranno le corrispondenti ordinate positive da B in H, e negative da H verso N, e il ramo EHO presenterà da E in H la sua concavità alla direttrice CBN, e da H in O presenterà la sua convessità, e s' avrà il valore negativo BN di y uguale ai due positivi BF, BG, come si conviene alla natura dell' equazione proposta.

162. Se per costruire la stessa equazione $y^3 + a^2c = 3a^2y$ si userà l' equazione composta alla retta inclinata $c + z = 3y$, basterà sostituire il valore di $y = \frac{z + c}{3}$ nell' equazione proposta, e, corretta l' espressione, s' avrà l' altra equazione $y^3 = a^2z$, in cui, prendendo z per ordinata, s' avranno i rami GIOB, BHN. Col costruire adunque i due luoghi colle note regole, s' avranno i punti d' intersecazione I, O, N. Li due primi somministrano i valori positivi BL, BK dell' ascissa y, ed il terzo BQ dà il valore negativo uguale ai due positivi insieme presi.

FIGURA LV.

163. Colla stessa facilità s' otterranno fedelmente i tre valori reali dell' incognita nell' equazione finale $y^3 + a^2c = 3a^2y$, se si userà l' equazione alla retta paralella, e per esempio $z = c$, bastando perciò sostituire z presa per ordinata nell' equazione proposta, e s' avrà l' equazione per l' altro luogo $y^3 + a^2z = 3a^2y$; onde, notata $BE = z = c$, si tiri EFI paralella alla direttrice BC, si costruisca l' altra equazione, e s' avrà il luogo corrispondente MFKBHI, che

FIGURA LVI.

è segato dalla paralella IEF nei punti F, K, I, dai quali tirate le FG, KL, IN paralelle alla BD, s'avranno nelle BL, BG i due valori positivi di y, e nella BN il valore negativo uguale ai due positivi.

Giova quì rammentare ciò, che altrove è già stato avvisato, cioè che, qualora i due luoghi in vece d'intersecarsi si toccano, si hanno sempre nel punto del contatto due valori uguali dell' incognita.

164. Considerando le figure, che risultano dalle costruzioni (§. 161, 162, 163), si vede che, qualunque equazione s'adoperi per la linea retta, si trova sempre, che l'altra equazione somministra una curva particolare, la quale ha una posizione, ed un andamento diverso, e che queste varietà non intorbidano in alcuna maniera la soluzione del problema; per la qual cosa, siccome le fatte riflessioni non dipendono dal grado dell'equazione, che si è costrutta, così si conchiude potersi esse riflessioni applicare alle equazioni di qualsivoglia grado, come si fa nel seguente esempio.

165. Sia proposto di costruire l' equazione $z^5 - fz^4 + acz^3 - a^2dz^2 + a^3cz = a^4m$. Si prenda l' equazione arbitraria alla parallella $y = m$; e considerando y per ordinata, sostituiscasi nell' equazione proposta, e questa si divida per a^4, s' avrà

$$\frac{z^5 - fz^4 + acz^3 - a^2dz^2 + a^3cz}{a^4} = y.$$

Presa per tanto z per ascissa, si attribuiscano alla medesima diversi valori positivi, e s' avranno, risolvendo sempre un' equazione di primo grado (§. 151), i valori delle corrispondenti ordinate y, col mezzo de' quali si descriverà la curva BEFGHIKLN. Se poi si attribuiranno valori negativi all' ascissa z, s' avranno gli altri rami a sinistra RST. Ciò fatto, coll' intervallo di $y = m$ si noti la distanza BD, e dal punto D si tiri la retta DN paralella alla direttrice BC; dai punti di contatto, o d' intersecazione di questa retta colla curva descritta si tirino le EP, FQ, NC paralelle alla BD, le corrispondenti ascisse BP, BQ, BC saranno i valori positivi di z.

FIGURA LVII.

Occorrendo poi, che in qualsivoglia equazione la paralella NDN segasse

i rami RST a sinistra di B, si tireranno pure dai punti d' intersecazione delle paralelle alla direttrice BD, e le ascisse, che queste paralelle verranno a determinare nella direttrice CBT, somministreranno i valori negativi dell' incognita.

Se nell'equazione proposta l'omogeneo situato nell' altro membro separato dall' incognita sarà negativo, in tal caso si noterà il valore negativo di m da B in V, e si tirerà VO paralella alla BC. Finalmente, se l'omogeneo sarà formato dalla potestà di una sola lettera, e per esempio a^7, si dovrà sostituire un rettangolo $mn = a^2$, e s' avrà $a^7 = a^5 mn$; indi si prenderà m, o pure n per l'equazione alla paralella $n = y$, indi si opererà come avanti.

Se in queste costruzioni si userà la scala coi numeri nel modo altrove specificato, si descriverà con maggior prestezza la curva; chiaro essendo, che i problemi numerici si possono anche tutti risolvere col presente metodo, e occorrendo, che i numeri fossero considerabili, si cercherà di dividere le radici dell' equazione, e per esempio, se si

vorrà costruire geometricamente l'equazione numerica
$x^5 - 24x^4 + 32x^3 + 640x^2 - 512x + 3072 = 0$, basterà dividere le radici dell'equazione per 4, scrivendo
$x^5 - 24x^4 + 32x^3 + 640x^2 - 512x + 3072 = 0$,
4 16 64 256 1024
e fatta la divisione, s'avrà l'equazione
$x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 2x + 3 = 0$,
che si potrà facilmente costruire.

FINE DEL LIBRO SECONDO.

LIBRO TERZO

Del Calcolo Differenziale.

166. Il Calcolo Differenziale, che *Analisi delle quantità infinitamente picciole*, o *Metodo delle Flussioni* suol anche chiamarsi, ha per oggetto le quantità crescenti, ed evanescenti.

Questo calcolo si adopera nella Geometria sublime, e serve per iscoprire diverse proprietà delle curve, che non si potrebbero derivare altronde, se non con gran difficoltà.

L'invenzione di questo metodo si attribuisce al Cavaliere Isaac Nevvton, dopo che l'insigne Cavallerio ebbe eccitata l'idea degl'Indivisibili, ed è tal metodo per la sua semplicità, ed universalità preferibile a quegli altri, che fin' ora sono stati pubblicati.

CAPO PRIMO.

Delle Flussioni, o Differenze di diverso ordine, e del Calcolo delle medesime.

167. Le quantità infinitamente picciole, di cui trattiamo, nascono solamente dalle grandezze variabili, che per ciò *Fluenti* si chiamano, come sono le coordinate di una curva, il corrispondente arco ec.; imperciocchè queste variabili, come già si è veduto, possono continuamente crescere, o pure sminuire, mentre che l'asse, il parametro, i diametri, ed altre simili linee sono costanti, ed immutabili nella medesima curva.

Le quantità infinitamente picciole nascenti, ed evanescenti si considerano minori di qualsivoglia grandezza assegnabile, e si chiamano *Flussioni*, *Differenze*, o *Elementi* delle variabili; esse si distinguono in prime, seconde, terze ec. flussioni, o dicasi flussioni del primo, secondo, terzo ec. ordine, o genere, e si confrontano fra loro nella medesima maniera, che si pratica nella

Geometria delle quantità finite, e determinate, di modo che, paraficando flussioni del medesimo ordine, la loro ragione si può esprimere con una quantità finita, ed assegnabile.

Per darne un riscontro, sia ABC un triangolo di grandezza determinata, se la retta FH si moverà da C verso A sempre paralella al lato BC, succederà, che il triangolo HAF sarà sempre simile al triangolo ABC, quantunque i lati del picciol triangolo col continuo sminuire diventino infinitamente piccioli, e però sarà sempre AH : AF : : AB : AC, ma $\frac{AB}{AC}$ è una grandezza assegnabile, e finita, adunque sarà pure $\frac{AH}{AF}$ una grandezza assegnabile, e finita, ed uguale all' altra $\frac{AB}{AC}$. Siccome le medesime conseguenze hanno sempre luogo, di qualsivoglia ordine diventino le quantità infinitamente picciole AH, AF, purchè isminuiscano nella divisata maniera, onde l' antecedente sia sempre del medesimo ordine del suo conseguente, così si scorge, come nell' atto, che esse quantità

FIGURA LVIII.

svaniscano affatto col continuo decrescere, sia tutt' ora $\frac{AH}{AF}$ una quantità finita, ed uguale alla data $\frac{AB}{AC}$.

168. Dal ragionamento antecedente consegue, essere cosa affatto indifferente il considerare le flussioni come quantità finite, o come quantità, che appena cominciano a nascere, o nell' atto, che svaniscano, ognivoltache si tratta solamente della ragione, che le flussioni hanno fra loro; e perchè nell' uso, che si fa del calcolo di queste quantità, si tratta soltanto della ragione, e non già del valore assoluto delle medesime, così si comprende facilmente quanto vana sia stata la questione di coloro, che hanno voluto rendere sospetto d' errore questo calcolo, a motivo, che in esso per maggior facilità si maneggiano le flussioni, come se fossero quantità finite, ed assegnabili.

Noi tralascieremo di addurre le dimostrazioni comprovanti in tutto il rigor geometrico la certezza, e la precisione di questo calcolo, poichè abbiamo solo in mira l' uso del medesimo, e basterà

avvisare, che il modo, con cui si maneggia questo calcolo, fa, che, quando due quantità finite differiscono fra di loro solamente per una prima flussione, esse quantità finite si possono considerare uguali. Lo stesso dicasi, se due prime flussioni differiranno fra loro solamente per una flussione di secondo ordine; se due flussioni di secondo ordine differiranno fra loro solamente per una flussione di terzo ordine, e così di mano in mano.

169. La linea, la superficie, il solido, e le altre quantità di quattro, cinque, sei ec. dimensioni hanno ciascheduna le sue prime, seconde, terze, quarte, ec. flussioni, con questo solo divario, che le prime, seconde, terze ec. flussioni di una linea sono sempre linee, le prime, seconde, terze ec. flussioni delle superficie sono sempre superficj, le prime, seconde, terze ec. flussioni dei solidi sono altrettanti solidi, e così dicasi delle prime, seconde, terze ec. flussioni delle quantità di quattro, cinque, sei ec. dimensioni.

Per vedere, come si consideri la ragione fra le prime flussioni lineari,

FIGURA LIX. suppongasi, che AMO sia una curva, la quale, da A andando verso O, s'allontana dalla direttrice AB, e sia AP l'ascissa, PM la corrispondente ordinata, se s'immagini, che l'ascissa AP cresca di una prima flussione PQ, dopo d'aver tirata QO paralella alla PM, ed MR paralella alla AB, sarà RO la prima flussione, o l'elemento dell'ordinata PM, e sarà MO la prima flussione, o l'elemento dell'arco AM.

Tutte esse flussioni si notano col segno positivo, allorchè si considera, che le variabili producenti le flussioni crescano; ma, se si considera, che l'ascissa AP sminuisca di una prima flussione PG, tirata GH paralella alla PM, ed HK paralella alla AB, sarà KM la prima flussione dell'ordinata PM, e sarà MH la prima flussione dell'arco AM, e tutte esse flussioni si scriveranno col segno negativo per dimostrare, che le variabili, dalle quali esse derivano, vanno sminuendo.

Se poi la curva LMN s'accosta alla direttrice AB, andando da A verso B, e l'ascissa AP cresce di una prima flussione PQ, tirata QN paralella alla

FIGURA LX.

PM, ed NS paralella alla AB, sarà SM la prima flussione dell' ordinata PM, e sarà MN la prima flussione dell' arco LM, dovendosi scrivere col segno positivo le flussioni dell' ascissa, e dell' arco, poichè queste variabili crescono, e si scriverà col segno negativo la flussione dell' ordinata, poichè questa decresce; ma si dovrà operare all' opposito, se l' ascissa AP decrescerà per una prima flussione PG.

Finalmente, se le ordinate in vece di essere paralelle fra loro verranno tutte dirette al medesimo polo, o foco F, come FG nella curva IGT, e l' arco IG crescerà per una prima flussione GT, tirata la corrispondente ordinata FT, e dal centro F descritto l' archetto GR, sarà RT la prima flussione dell' ordinata GF da scriversi positivamente, se la curva, andando da I verso G, s' allontana dal foco F; ma dovrà essa flussione avere il segno negativo, se la curva s' avvicinerà al foco.

FIGURA LXI.

170. Le flussioni lineari del second' ordine si considerano nel seguente modo.

Sia MNO una curva, di cui AR sia l' asse, AP l' ascissa, e PM l' ordinata, e suppongasi per maggior sem-

FIGURA LXII.

plicità, che le prime flussioni P Q, Q R dell' ascissa siano fra loro uguali, cioè che sia costante la prima flussione dell' ascissa, saranno fra esse disuguali le corrispondenti flussioni N B, C O dell' ordinata, essendo queste determinate dalle MG, NC paralelle alla AR (§. 169). Per li punti M, N si tiri la retta MNF, questa segherà la G O in F fra i punti O, G, se la curva sarà convessa verso l' asse, e al di sopra del punto O, se la curva sarà concava: in amendue questi casi sarà però sempre GF doppio di BN, poichè per ipotesi è GM doppio di BM, e sarà $GC = CF = BN$, e quindi sarà FO la differenza fra le due prime flussioni B N, C O dell' ordinata. Questa differenza si chiama *flussione di second' ordine*, o *seconda differenza*, e si scrive col segno positivo, quando $CO > CF$, come accade nelle curve convesse verso l' asse AR; ma si scrive col segno negativo, se sia $CO < CF$, come avviene nelle curve concave verso il medesimo asse. Queste seconde differenze vanno isminuendo nelle curve concave verso l' asse, allorchè da questo s' allontanano, andando da A verso R, e crescono

nelle curve convesse; ma succede all' opposito, qualora le mentovate curve s' avvicinano all' asse nell' andare da A verso R.

La differenza, che corre fra le due prime flussioni MN, NO dell' arco TM, si chiama seconda flussione dell' arco, da scriversi col segno positivo, o negativo, secondo che sarà NO maggiore, o minore di MN. Continuando poi a operare nella divisata maniera, si troveranno le flussioni terze, quarte ec. delle linee.

171. Gli Analisti si servono della lettera d prefissa alla variabile per esprimere le flussioni, e così dx esprime la prima flussione dell' ascissa x, dy esprime la prima flussione dell' ordinata y, dz esprime la prima flussione dell' arco z. Per esprimere poi le seconde flussioni, si prefigge due volte la lettera d alla variabile, o pure si scrive d elevato al quadrato, e così ddx, ddy, ddz, o pure d^2x, d^2y, d^2z esprimono le seconde flussioni delle variabili x, y, z. Coll' istesso metodo si procederà per scrivere le flussioni di altri ordini, onde $dddx$, $dddy$, $dddz$, o pure d^3x, d^3y, d^3z esprimeranno

le flussioni del terzo ordine delle variabili x, y, z, e così si opererà per notare le flussioni di altri ordini.

172. Dalle cose dette si deduce la regola per avere le prime flussioni di varie quantità lineari sommate insieme, o sottratte l'una dall'altra, bastando perciò prendere la flussione di ciascheduna variabile solamente, e scriverla col segno medesimo della variabile; il complesso di queste flussioni sarà la differenza della quantità proposta.

Per esempio la prima differenza di $x + y - z$ sarà $dx + dy - dz$, la prima differenza di $- y + u - z$ sarà $- dy + du - dz$, la prima differenza di $c + y + z$ sarà $dy + dz$, avvegnachè la costante c non ha flussione. Per la medesima ragione la prima differenza di $x - a - y + b + u$ sarà $dx - dy + du$, poichè le quantità a, b, essendo costanti, non hanno flussioni.

173. Per osservare come nascono le differenze delle superficie, si consideri, che nel rettangolo finito A B G F sia costante il lato FG $= c$, e variabile l'altro lato A F $= x$, e supponghasi, che questo cresca della prima flussione F K

Figura LXIII.

$= dx$, tutto il rettangolo ABFG $= cx$ verrà accresciuto del rettangolo FKGL $= cdx$, e sarà questo accrescimento la prima flussione, o dicasi l' elemento del proposto rettangolo cx.

Nell' istessa maniera, se supponendo costante il lato AF $= b$, sia poi variabile l'altro FG $= y$, si troverà, che crescendo FG per la prima flussione GM $= dy$, tutto il rettangolo ABGF $= by$ verrà aumentato del rettangolo BMGN $= bdy$, e questo accrescimento sarà pure la prima flussione dello stesso rettangolo ABFG $= by$.

Finalmente, se saranno variabili ambedue i lati AF $= x$, FG $= y$, e si supporrà, che ciascheduno d' essi cresca di una flussione del primo ordine FK $= dx$, GM $= dy$, il rettangolo AFBG $= xy$ sarà accresciuto del gnomone BNPKFG $= ydx + xdy + dxdy$, in cui i due rettangoli FKGL $= ydx$, BMGN $= xdy$ sono flussioni del primo ordine, poichè ciascheduno d' essi è formato con un lato finito, e con l' altro infinitamente picciolo; ma il rettangolo GLMP $= dxdy$ è una flussione superficiale di secondo ordine, stantechè ciascheduno

de' suoi lati è una quantità infinitamente picciola.

174. Ciò, che detto è delle flussioni delle superficie rettilinee, si dovrà applicare precisamente alle superficie curvilinee, ed alle mistilinee.

FIGURA LXIV.

Sia ASM una curva qualsivoglia colla direttrice AB delle ascisse. Suppongasi, che l' ascissa AP cresca di una prima flussione PQ, l' ordinata PM passerà nella positura QN paralella alla prima. Tirata pertanto dal punto M la retta MR paralella alla AB, s' avrà il rettangolo PQMR per la prima flussione del mistilineo AMP, poichè è formato colla quantità finita PM, e coll'infinitamente picciolo PQ (§. 173), e il triangoletto MRN sarà un infinitamente picciolo superficiale di secondo ordine, poichè ciascheduno de' suoi lati è una quantità infinitamente picciola. Se dal punto A si tira la corda AM, e si suppone, che l'arco ASM cresca di una prima flussione MN, e si tira l' altra corda AN, e fatto centro in A coll'intervallo AM si descrive l'archetto MO, il trilatero AMO sarà la prima flussione dell'area ASM, ed il triangoletto MON sarà una flussione di secondo ordine della superficie mistilinea ASM.

Le cose dette intorno gli infinitamente piccioli di diverso ordine, allorchè le coordinate crescono, si dovranno anche applicare nel caso, che esse decrescono, o che una cresca, mentre l' altra sminuisce; dovendosi sempre scrivere col segno più le flussioni delle variabili crescenti, e col segno meno le flussioni delle quantità evanescenti.

175. Nella medesima maniera si potranno concepire le flussioni di diverso genere nei solidi. Per esempio, se un paralellepipedo acx avrà un solo lato variabile x, questo col crescere della prima flussione dx diventerà $x + dx$, onde tutto il paralellepipedo sarà $acx + acdx$, e la prima flussione, o l' elemento del solido acx sarà $acdx$. Se il paralellepipedo avrà due lati variabili, come c, x, y, e crescendo ciascheduno d' essi, diventino $x + dx$, $y + dy$, esso paralellepipedo sarà $cxy + cydx + cxdy + cdxdy$, e la prima flussione del solido cxy sarà $cydx + cxdy$; ma la flussione $cdxdy$ sarà di secondo ordine, poichè è formata da due quantità infinitamente picciole. Finalmente, se si supporrà, che le tre dimensioni del paralellepipedo siano va-

riabili, come x, y, z, e che ciascheduna di esse cresca di una prima flussione, onde esse tre dimensioni siano $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, tutto il paralellepipedo sarà $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdxdy + ydxdz + xdydz + dxdydz$, e quindi $yzdx + xzdy + xydz$ sarà la prima flussione del solido xyz: la quantità $zdxdy + ydxdz + xdydz$ sarà una flussione di secondo ordine, e sarà flussione di terzo ordine l' espressione $dxdydz$, poichè è formata da tre grandezze infinitamente picciole.

176. Dalle cose dette (§§. 173, 174, 175) si deduce, che per trovare la prima differenza di un prodotto di due, o più dimensioni basterà prendere la somma dei prodotti di ciascheduna variabile nella flussione dell' altra.

Per esempio la prima differenza di xy sarà $xdy + ydx$, la prima differenza di axz sarà $axdz + azdx$, poichè la costante a non ha flussione. La prima differenza di $- xyz$ sarà $- xydz - xzdy - yzdx$. Il primo differenziale di $bcyu$ sarà $bcydu + bcudy$, poichè le costanti b, c non hanno flussioni. La medesima regola serve ancora per le quantità com-

poste, bastando perciò trovare la differenza di ciascun termine separato, e scriverla col proprio segno, e così la prima differenza di $axy - cyz$ sarà $axdy + aydx - cydz - czdy$. La prima differenza di $xy - zu$ sarà $xdy + ydx - zdu - udz$. La prima differenza di $xyz + xzt$ sarà $xydz + xzdy + yzdx + xzdt + xtdz + ztdx$. La prima differenza di $ax + yz - cu + bz$ sarà $adx + ydz + zdy - cdu + bdz$, e così di altre quantità.

177. Per trovare le prime differenze di una potestà qualsivoglia, basta fare un prodotto coll' esponente della potestà nella quantità elevata allo stesso grado meno l' unità, e moltiplicare il tutto nella flussione della quantità proposta.

Per esempio la differenza di x^3 sarà $3x^2dx$, imperciocchè essendo x^3 lo stesso, che xxx, il di cui differenziale è $xxdx + xxdx + xxdx$ (§. 176), col correggere l' espressione s' avrà $3x^2dx$ pel differenziale ricercato. Nell' istessa maniera, si troverà, che il differenziale di y^5 sarà $5y^4dy$, che il differenziale di $z^{\frac{7}{2}}$ sarà

$\frac{7}{2} z^{\frac{7}{2}-1} dz = \frac{7}{2} z^{\frac{5}{2}} dz$; che il differenziale di $x^{\frac{2}{5}}$ sarà $\frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} dx = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} dx$; che il differenziale di ax^4 sarà $4ax^3dx$; e così ancora il differenziale di $c^2 x^5 y^6$ sarà $5c^2x^4y^6dx + 6c^2x^5y^5dy$; il differenziale di $ax^{\frac{7}{3}} z^{\frac{4}{9}}$ sarà $\frac{7}{3} ax^{\frac{4}{3}} z^{\frac{4}{9}} dx + \frac{4}{9} ax^{\frac{7}{3}} z^{-\frac{5}{9}} dz$.

Siccome ciaschedun radicale si può esprimere in forma di potestà, così la medesima regola servirà ancora per trovarne le prime differenze. Se il radicale $\sqrt[3]{x^2}$ si esprimerà in quest' altra maniera $x^{\frac{2}{3}}$, s' avrà $\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx$ per la sua prima differenza. Essendo il radicale $\sqrt[4]{z^9}$ trasformato nella potestà imperfetta $z^{\frac{9}{4}}$, il suo differenziale sarà $\frac{9}{4} z^{\frac{5}{4}} dz$. Essendo il radicale $\sqrt[3]{x^3 y^5}$ trasformato in $x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{5}{2}}$, la

sua differenza sarà $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}dx + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}dy$,

e così di altri.

Per mezzo dell' istessa regola si troveranno anche le differenze delle potestà composte: per esempio della potestà

$\overline{ax + x^2}^{3}$ la differenza sarà

$3 \times \overline{ax + x^2}^{2} \times \overline{adx + 2xdx}$; della potestà

$\overline{zxu - axy}^{5}$ la differenza sarà $5 \times \overline{zxu - axy}^{4}$

$\times \overline{zxdu + zudx + xudz - axdy - aydx}$.

Del radicale composto $\sqrt[4]{cx^3 - y^2z^2}$, dopo d' averlo trasformato nella potestà imperfetta $\overline{cx^3 - y^2z^2}^{\frac{1}{4}}$, il differenziale sarà

$\frac{1}{4} \times \overline{cx^3 - y^2z^2}^{-\frac{3}{4}} \times \overline{3cx^2dx - 2yz^2dy - 2y^2zdz}$;

del radicale $\sqrt{a^2y + y^3}$, dopo d' esser trasformato nella potestà imperfetta

$\overline{a^2y + y^3}^{\frac{1}{3}}$, la differenza sarà $\frac{1}{3} \times \overline{a^2y + y^3}^{-\frac{2}{3}}$

$\times\overline{a^2\,dy + 3y^2\,dy}$; del radicale $\sqrt[4]{\overline{cx^2 - y^2z}^{\,5}}$, dopo d'averlo trasformato nella potestà $\overline{c\,x^2 - y^2\,z}^{\frac{5}{4}}$, la differenza sarà $\frac{5}{4}\times\overline{cx^2 - y^2z}^{\frac{1}{4}}\times\overline{2cxdx - 2yzdy - y^2dz}$, e così di altre potestà, o altri radicali più composti.

178. Per avere le prime differenze di una frazione convien scrivere un altro rotto, il cui numeratore sia il prodotto del denominatore nella flussione del numeratore, meno il prodotto del numeratore nella flussione del denominatore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore della proposta frazione. Per esempio della frazione $\frac{x}{y}$ la prima differenza sarà $\frac{ydx - xdy}{y^2}$; imperciocchè, se si suppone $\frac{x}{y} = z$, sarà $x = yz$, e trovando la differenza di quest' equazione, s' avrà $dx = ydz + zdy$, e quindi $\frac{dx - zdy}{y} = dz$; sostituiscasi iu quest'

equazione in vece di z il suo valore uguale $\frac{x}{y}$, si avrà

$$\frac{\frac{dx-xdy}{y}}{y}=dz=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$ cioè il differenziale di $z=\frac{x}{y}$ sarà $\frac{ydx-xdy}{y^2}$.

Applicando pertanto la data regola generale, si troverà, che il differenziale di $\frac{xy}{z}$ sarà $\frac{zxdy+zydx-xydz}{z^2}$; che la differenza di $\frac{x}{c}$ sarà $\frac{dx}{c}$, poichè la costante c non ha flussione. La differenza di $\frac{a}{x}$ sarà $-\frac{adx}{x^2}$; la differenza di $\frac{c+y}{z}$ sarà $\frac{zdy-cdz-ydz}{z^2}$; la differenza di $\frac{x}{c-x}$ sarà

$$\frac{cdx-xdx+xdx}{\overline{c-x}^2}=\frac{cdx}{\overline{c-x}^2},$$ la differenza di

$\frac{5yz}{a+z}$ sarà $$\frac{\overline{a+z}\times\overline{5ydz+5zdy}-5yzdz}{\overline{a+z}^2},$$

ossia $$\frac{5aydz+5azdy+5yzdz+5z^2dy-5yzdz}{\overline{a+z}^2},$$

e correggendo l'espressione, sarà $\frac{5aydz + 5azdy + 5z^2dy}{\overline{a+z}^2}$; la differenza di

$\frac{x}{\overline{ay-z^2}^2}$ sarà $\frac{\overline{ay-z^2}^2 \times dx - 2x \times \overline{ay-z^2}}{\overline{ay-z^2}^4}$

$\times \overline{ady - 2zdz}$. La differenza di $\frac{\overline{ay+x^2}^3}{z^2}$ sarà

$$\frac{3z^2 \times \overline{ay+x^2}^2 \times \overline{ady+2xdx} - 2zdz \times \overline{ay+x^2}^3}{z^4}.$$

La differenza di $\frac{\overline{cy^2+yz^2}^5}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{\overline{cy^2+yz^2}^5}{\overline{ax-x^2}^{\frac{1}{2}}}$ sarà

$$\frac{\overline{ax-x^2}^{\frac{1}{2}} \times 5 \times \overline{cy^2+yz^2}^4 \times \overline{2cydy+z^2dy+2yzdz}}{ax-x^2}$$

$$-\frac{\frac{1}{2} \times \overline{cy^2+yz^2}^5 \times \overline{ax-x^2}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx - 2xdx}}{ax-x^2}$$

Della quantità $\overline{a^2 - x^2} \times \sqrt{a+x}$

$= \overline{a^2 - x^2} \times \overline{a+x}^{\frac{1}{2}}$ la differenza sarà

$$-2xdx \times \overline{a+x}^{\frac{1}{2}} + \overline{a^2-x^2} \times \frac{1}{2} \times \overline{a+x}^{-\frac{1}{2}}$$

$\times dx$. Della quantità $\overline{cxy+z^3}^{4} \sqrt[5]{a^3-y^5}$
la differenza sarà

$$4 \times \overline{cxy+z^3}^{3} \times \overline{cxdy+cydx+3z^2\,dz} \times \overline{a^3-y^3}^{\frac{1}{5}}$$

$$+\overline{cxy+z^3}^{4} \times \frac{1}{5} \times \overline{a^3-y^3}^{-\frac{4}{5}} \times \overline{-3y^2dy}$$

e così di altri.

179. Le regole date per trovare le differenze del primo ordine servono precisamente per ricavare anche quelle del secondo ordine, del terzo ec. Il calcolo, che tratta delle seconde, terze ec. differenze, suol chiamarsi *Differenzio - differenziale.*

Sia proposto di trovare la seconda differenza della formola del primo grado $ydx - xdy$; se in questa non si considera nessuna delle flussioni lineari per

costante, la ricercata differenza sarà $dydx + yd^2x - dxdy - xd^2y = yd^2x - xd^2y$. Se poi si considera la flussione dx per costante, il differenziale ricercato sarà $dydx - dxdy - xd^2y = - xd^2y$. Finalmente, se si supporrà costante la flussione dy, sarà $dydx + yd^2x - dxdy = yd^2x$ la seconda differenza ricercata.

La seconda differenza di $\frac{zdx}{dz}$ sarà $\frac{dxdz^2 + zdzd^2x - zdxd^2z}{dz^2}$, se non si suppone nessuna flussione costante, ma, supposto dx costante, sarà $\frac{dz^2dx - zdxd^2z}{dz^2}$ la differenza ricercata; e finalmente, prendendo dz per costante, sarà $\frac{dz^2dx + zdzd^2x}{dz^2} = \frac{dzdx + zd^2x}{dz}$ la differenza ricercata.

Della frazione $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, prendendo dx per costante, la seconda differenza sarà

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2 + yd^2y} \times \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\overline{xdx - ydy} \times \overline{xdx + ydy}}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

o sia
$$\frac{x^2dy^2+x^2yd^2y+y^2dx^2+y^3d^2y-2xydxdy}{\overline{x^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}$$
prendendo poi dy per costante, la differenza sarà
$$\frac{\overline{dy^2+dx^2+xd^2x}\,\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{\overline{xdx-ydy}\times\overline{xdx+ydy}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$
Finalmente, considerando variabili ambedue le prime flussioni dx, dy, la seconda differenza sarà
$$\frac{\overline{dx^2+xd^2x+dy^2+yd^2y}\,\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{\overline{xdx-ydy}\times\overline{xdx+ydy}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Colle medesime regole si troveranno ancora le seconde differenze delle formole di secondo grado. Per esempio, se nel differenziare la formola di secondo grado $\dfrac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxd^2y}=\dfrac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$
si prende dx costante sarà
$$\frac{3}{2}\times 2dyd^2y\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\times\overline{-dxd^2y}+dxd^3y\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2d^2y^2}$$

l'ipotesi di dy costante ripugna in questa formola, poichè contiene di già la seconda differenza d^2y. Finalmente, se si supporranno variabili ambedue le prime flussioni dx, dy, la seconda differenza ricercata sarà

$$\frac{\frac{3}{2}\times\overline{2dxd^2x+2dyd^2y}\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}\times\overline{-dxd^2y}}{dx^2d^2y^2}$$

$$\frac{\overline{+dxd^3y+d^2xd^2y}\times\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2d^2y^2}$$

Con un somigliante metodo si procedrà negli altri casi ancora più composti; dovendosi però quì notare, che la supposizione di una prima flussione costante rende più brevi, e facili i calcoli; e perchè tale supposizione è in man nostra di farla senza pericolo, che da ciò ne nasca errore, così in avvenire useremo sempre questo ripiego.

CAPO II.

Data l' equazione di una curva, trovare cosa sia la tangente, la sottotangente, la normale, la sottonormale, e se la curva abbia assintoti obbliqui all' asse.

180. L'applicazione, che si fa del Calcolo differenziale nella risoluzione di questi problemi, si chiama *Metodo delle Tangenti*, in cui s' adoperano solamente le flussioni del primo ordine. Questo metodo serve ugualmente per le curve algebraiche, e per le meccaniche, col solo divario, che nelle prime una sola formola basta per trovare ciò, che si ricerca, in vece che nelle curve trascendentali è necessario di trovare formole diverse, la cui costruzione dipende dal modo, col quale la curva meccanica è stata generata.

Nöi principieremo dalle curve geometriche, cercando in esse cosa sia la sottotangente, poichè da tale scoprimento si può poi colla sola geometria ordinaria trovare il valore della tangente, sottonormale, e normale.

FIGURA LXV.

181. Sia AMO una curva algebraica qualsivoglia, che da A in M si scosta dall' asse AB, e sia TMN la tangente, PT la sottotangente, AP l' ascissa $= x$, PM l' ordinata $= y$, e sia PQ una prima flussione $= dx$, la corrispondente ordinata QO sarà $y + dy$ (§. 169). In oltre, perchè la differenza ON fra le prime flussioni RN, RO è una flussione di second' ordine (§. 170), e che le due superficie MRO, MRN hanno di comune la prima flussione MR, così esse flussioni RN, RO si potranno considerare uguali (§. 168), e si potrà pure considerare, che il mistilineo MRO s' adatti esattamente al triangolo rettilineo MRN; quindi ne consegue, che essendo l' ordinata QN paralella alla PM, il triangolo MRN, che *Caratteristico* suol chiamarsi, sarà simile al triangolo TPM, onde avremo RN : RM : = PM : PT, o sia in termini analitici $dy : dx = y : \frac{y\,dx}{dy}$ $=$ PT, formola generale per la sottotangente delle curve algebraiche, che hanno le ordinate paralelle.

Per applicare questa formola nell' indagare la sottotangente delle curve particolari, di cui sia data l' equazione, basterà trovare la differenza della proposta equazione, e da questa equazione differenziata ricavare il valore di $\frac{dx}{dy}$, se questo valore si sostituirà nella formola generale, s' otterrà quello della sottotangente della proposta curva.

182. Per addurre alcuni esempj, abbiasi la curva dell' equazione $px = y^2$, di cui si cerca la sottotangente. Col differenziare quest' equazione, s' avrà $pdx = 2ydy$, onde $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Sostituiscasi questo valore nella formola generale della sottotangente (§. 181), s' avrà $\frac{ydx}{dy} = y \times \frac{2y}{p} = \frac{2y^2}{p}$, e sostituito px in vece di y^2, sarà $\frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$ valore ricercato della sottotangente TP, la qual cosa è conforme a quanto è stato dimostrato nella parabola appoloniana, a cui la proposta equazione appartiene.

Abbiasi l' equazione $y^2 = ax - x^2$, della di cui curva si cerca la sottotangente. Col differenziare l' equazione s' avrà $2ydy = adx - 2xdx$, e quindi $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a - 2x}$, e sostituendo questo valore nella formola generale della sottotangente, s' avrà $\frac{ydx}{dy} = y \times \frac{2y}{a - 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$, e surrogato $ax - x^2$ in vece di y^2, sarà $\frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$, vale a dire, che la sottotangente del cerchio euclideo, a cui la proposta equazione appartiene, è quarta proporzionale dopo $\frac{a}{2} - x$, $a - x$, ed x.

Sia proposto di trovare la sottotangente della curva $xy = c^2$, che è l' iperbola fra gli assintoti A P, A O. Si differenzi l' equazione, e s' avrà $xdy + ydx = 0$, poichè la costante c^2 non ha flussioni, e quindi $dx = -\frac{xdy}{y}$. Sostituiscasi questo valore nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, s' avrà $\frac{ydx}{dy} = y \times -\frac{x}{y} = -x$,

FIGURA LXVI.

vale a dire, che in questa curva KLM la sottotangente PQ è uguale all' ascissa AP, ma dee essa sottotangente notarsi dalla banda opposta, cioè da P verso Q per essere negativo questo valore, in vece, che nelle altre curve esaminate la sottotangente si è segnata da P verso T, perchè il suo valore è positivo.

Per avere la sottotangente della parabola del quinto grado $px^4 = y^5$, se ne differenzi l' equazione, e sarà $4px^3dx = 5y^4dy$, $\frac{dx}{dy} = \frac{5y^4}{4px^3}$, e sostituendo nella formola generale questo valore di $\frac{dx}{dy}$, sarà $\frac{ydx}{dy} = \frac{y \times 5y^4}{4px^3} = \frac{5y^5}{4px^3}$, e sostituito px^4 in vece di y^5, sarà $\frac{5y^5}{4px^3} = \frac{5px^4}{4px^3} = \frac{5}{4}x$, valore della sottotangente ricercata.

Per avere la sottotangente della Versiera, la cui equazione è $y^2 = \frac{a^2x}{a-x}$, col differenziare quest' equazione, s' avrà, $2aydy - 2xydy = a^2dx + y^2dx$, $\frac{dx}{dy}$

$= \frac{2ay - 2xy}{a^2 + y^2}$, e sostituendo nella formola generale questo valore, sarà

$\frac{ydx}{dy} = y \times \frac{2ay - 2xy}{a^2 + y^2}$, e surrogato in vece di y^2 il suo uguale $\frac{a^2 x}{a - x}$, sarà

$$\frac{2ay^2 - 2xy^2}{a^2 + y^2} = \frac{\frac{2a \times a^2 x}{a - x} - \frac{2x \times a^2 x}{a - x}}{a^2 + \frac{a^2 x}{a - x}}$$

$= \frac{2ax - 2x^2}{a}$ valore della sottotangente ricercata, la quale, come appare, è quarta proporzionale dopo a, $2a - 2x$, ed x.

Per avere la sottotangente della Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, col differenziare, s'avrà $2aydy - y^2dx - 2xydy = 3x^2dx$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay - 2xy}{3x^2 + y^2}$, e sostituito questo valore nella formola generale, sarà $\frac{ydx}{dy}$ $= \frac{y \times 2ay - 2xy}{3x^2 + y^2} = \frac{2ay^2 - 2xy^2}{3x^2 + y^2}$, e surrogato in vece di y^2 il suo uguale, sarà

$$\frac{2ay^2 - 2xy^2}{3x^2 + y^2} = \frac{\overline{2a - 2x} \times x^3}{\overline{a - x} \times 3x^2 + \frac{x^3}{a - x}}$$

$$= \frac{2x^3}{3x^2 + \frac{x^3}{a - x}} = \frac{2ax - 2x^2}{3a - 2x}$$ valore della sottotangente ricercata.

Nell' istessa maniera si opererà per avere la sottotangente di qualsivoglia altra curva geometrica, di cui sia data l' equazione.

183. Ritrovata la sottotangente di una curva, sarà facilissimo avere per mezzo della Geometria ordinaria il valore della sua tangente, della sottonormale, e della normale.

A tal fine si noti il valore della sottotangente da P in T; e siccome è anche cognita l' ordinata PM, e che il triangolo TPM è rettangolo in P, così sarà anche cognita l' ipotenusa TM $= \sqrt{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}$ valore della tangente.

FIGURA LXVII.

Dal punto M si tiri MF normale alla TM, e si rifletta, che il triangolo TMF rettangolo in M è diviso in due

triangoli simili T P M, P M F dalla M P perpendicolare alla base T F, quindi è, che essendo data la sottotangente PT, e l' ordinata P M, si determinerà con ciò il valore della sottonormale P F, poichè avremo P T : P M = P M : P F $= \frac{\overline{PM}^2}{PT}$. Finalmente dal ritrovato valore PF si ricaverà quello della normale MF $= \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PF}^2}$ a causa del triangolo P M F rettangolo in P.

184. Se in vece di cercare colla geometria ordinaria il valore della tangente, della normale, e della sottonormale si cercherà per mezzo del calcolo differenziale, converrà instituire le formole per ciascheduna di esse linee, non essendo poi in questo caso necessaria la cognizione della sottotangente.

Supposte pertanto le costruzioni dei §§. 181, 183, si rifletta, che nel triangolo caratteristico M R N rettangolo in R, essendo RM = dx, RN = dy, sarà l' ipotenusa MN = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ e quindi nei triangoli simili M N R, T P M

avremo RN : MN = PM : MT, cioè

$dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} = y : \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} =$

MT, formola generale per la tangente.

Perchè sono pure simili i triangoli RMN, MPF, si ha MR : RN = PM : PF, cioè $dx : dy = y : \frac{ydy}{dx} =$ PF, formola generale per la sottonormale.

Finalmente coll' instituire l' analogia MR : MN = PM : MF, o sia dx

$: \sqrt{dx^2 + dy^2} = y : \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} =$ MF,

si ha la formola generale per la normale MF.

185. L' uso delle ritrovate formole (§. 184) non è punto diverso da quello della formola per la sottotangente (§. 182).

Debbasi per esempio trovare la sottonormale della parabola cubica $p^2x = y^3$. Dopo d' aver differenziata quest' equazione, s'avrà $p^2dx = 3y^2dy$, e $\frac{p^2}{3y^2} = \frac{dy}{dx}$.

Sostituiscasi questo valore di $\frac{dy}{dx}$ nella formola generale della sottonormale (§. 184),

sarà $\frac{ydy}{dx} = \frac{y \times p^2}{3y^2} = \frac{p^2}{3y} =$ P F valore della sottonormale ricercata.

Se si vorrà avere la tangente di questa curva, si sostituirà nella formola generale della tangente in vece di dx il suo uguale $\frac{3y^2dy}{p^2}$, e sarà

$$y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = y \sqrt{\frac{\frac{9y^4dy^2 + dy^2}{p^4}}{dy}}$$

$= y \sqrt{\frac{9y^4 + p^4}{p^4}}$, e sostituendo ancora $p^2 x$ in vece di y^3, sarà

$$y \sqrt{\frac{9y^4 + p^4}{p^4}} = \frac{y}{p} \sqrt{9xy + p^2} = \text{TM}.$$

Finalmente, se si surrogherà il valore di dx nella formola generale per la normale, s' avrà $y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$

$= y \frac{\sqrt{\frac{9y^4dy^2 + dy^2}{p^4}}}{\frac{3y^2dy}{p^2}} = \frac{\sqrt{9y^4 + p^4}}{3y}$, e sosti.

tuendo in vece di p^2 il suo uguale $\frac{y^3}{x}$, sarà

$$\frac{\sqrt{9y^4+p^4}}{3y} = \frac{\sqrt{9y^4+\frac{y^6}{x^2}}}{3y} = y\frac{\sqrt{9x^2+y^2}}{3x}$$

valore della normale ricercata MF.

Nell' istessa guisa si procederà per avere il valore delle mentovate linee in qualsivoglia altra curva geometrica.

186. Ultimamente, affine di determinare se una curva AM, la quale si scosta dall' asse AB, andando da A verso B, abbia un qualche assintoto inclinato all' asse, basterà considerare, che la tangente TM diventa assintoto, allorchè tocca la curva in un punto M infinitamente distante dal vertice A, e che in questo caso le coordinate AP, PM diventano ambedue infinite; ma la distanza tra il vertice A, ed il punto T, in cui l' assintoto sega l' asse prolungato, rimane tutt' ora quantità finita.

FIGURA LXVIII.

Due cose pertanto convien ritrovare, affine di determinare, se una curva abbia assintoti obbliqui all' asse.

1.° La distanza tra il vertice A della curva, ed il punto T, in cui l' as-

sintoto interseca l' asse AB prolungato.

2.° L' angolo MTB formato dall' assintoto coll' asse.

187. Per trovare la distanza AT tra il vertice della curva, ed il punto d' intersecazione dell' assintoto coll' asse, si cercherà prima d' ogni cosa il valore della sottotangente della proposta curva, da questo valore si sottrarrà l'ascissa, e considerando indi, che nell' avanzo i termini, i quali contengono le variabili x, y, sono infinitamente grandi rispetto a quelli, che sono formati con quantità costanti, si cancelleranno questi, e i termini restanti somministreranno un valore finito per l' intercetta AT.

Per esempio della curva $ay^2 = acx + cx^2$ la sua sottotangente $TP = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x}$, da questa si sottri l' ascissa x, e corretta l' espressione, s' avrà $\frac{ax}{a + 2x}$, nella quale espressione, cancellando il termine a del divisore come infinitamente picciolo rispetto all' altro termine $2x$, si ha $\frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$ $= AT$ quantità finita.

Della curva $y^3 - x^3 = cxy$ la sottotangente TP $= \frac{3y^3 - cxy}{3x^2 + cy}$, da cui sottratta l'ascissa x, e sostituito $3cxy$ pel valore di $3y^3 - 3x^3$, si ha d'avanzo $\frac{cxy}{3x^2 + cy}$, nella qual espressione, cancellando il termine cy, perchè infinitamente picciolo rispetto all'altro $3x^2$, si ha $\frac{cxy}{3x^2} = \frac{cy}{3x} =$ AT quantità finita; imperciocchè, essendo nella medesima curva costante, e finita la ragione $\frac{y}{x}$, sarà per conseguenza anche tale l'espressione $\frac{cy}{3x}$.

Della curva $y^3 = ax^2 - x^3$ la sottotangente TP $= \frac{3ax - 3x^2}{2a - 3x}$, da cui sottratta l'ascissa x, si ha l'avanzo $\frac{ax}{2a - 3x}$, e cancellando il termine $2a$, che riesce infinitamente picciolo rispetto all'altro termine $3x$, si ha $\frac{ax}{-3x} = -\frac{a}{3} =$ AT quantità finita; dovendosi però in questo caso notare il punto T da A verso B,

giacchè il valore di AT risulta negativo.

Se poi avvenga, che il valore di AT riesca immaginario, come succede nella parabola appoloniana, ed in altre curve; allora saremo certi, che la curva non ha assintoti inclinati all' asse.

188. Affine di determinare l' angolo MTA formato dall' asse AB coll' assintoto TM, che si suppone toccare la curva AM nel punto M infinitamente distante dal vertice A, si tiri da questo punto all' asse AB la perpendicolare AK, e si rifletta, che il triangolo TAK è simile al triangoletto caratteristico MNR per essere MR paralella alla TB, e quindi sarà MR : NR = AT : AK, cioè $dx : dy = AT : AK$.

FIGURA LXIX.

Ciò premesso, della curva proposta, e per esempio $ay^2 = acx + cx^2$, di cui si cerca l' assintoto, si differenzi l' equazione, s' avrà $2aydy = acdx + 2cxdx$. Se si risolve quest' equazione in analogia, si ha $dx : dy = 2ay : ac + 2cx$, ma alla prima ragione $dx : dy$ è anche uguale quella di $AT : AK$, sicchè s' avrà $2ay : ac + 2cx = AT : AK$. In questa analogia si sostituisca il valore di AT ritrovato a tenore dell' antecedente pa-

ragrafo, il qual valore nel nostro caso è $\frac{a}{2}$, e si scancelli il termine ac, che riesce infinitamente picciolo rispetto all' altro $2cx$, sarà $2ay : 2cx = \frac{a}{2} : AK = \frac{cx}{2y}$. Pertanto, se si farà $AK = \frac{cx}{2y}$, e si tirerà la retta TK, questa sarà l' assintoto ricercato.

Così ancora della curva $y^3 - x^3 = cxy$ essendo l' equazione differenziale $3y^2dy - 3x^2dx = cxdy + cydx$, s' avrà (risolta in analogia) $dx : dy = 3y^2 - cx : 3x^2 + cy = AT : AK$, e sostituendo in essa il valore di AT ritrovato a tenore dell' antecedente paragrafo, s' avrà $3y^2 - cx : 3x^2 + cy = \frac{cy}{3x} : AK$, e scancellando nella prima ragione i termini cx, cy, poichè infinitamente piccioli riguardo agli altri $3y^2$, $3x^2$, sarà $3y^2 : 3x^2 = \frac{cy}{3x} : \frac{cx}{3y} = AK$. Pertanto se si farà $AK = \frac{cx}{3y}$, e si tirerà la retta TK, questa sarà l' assintoto ricercato, e così di altre curve.

189. La formola generale per la sottotangente $\frac{ydx}{dy}$ (§. 181), sebbene sia costrutta nella supposizione, che AB sia asse della curva, si troverà, ciò non ostante, che non si muta, quantunque si supponga, che A B sia un diametro qualsivoglia; onde la stessa formola serve per tutti i casi, e si potrà pure colla cognizione della sottotangente trovare la normale, la tangente, e la sottonormale di qualsivoglia diametro per mezzo della Geometria ordinaria.

Se poi queste linee si vorranno trovare per mezzo del calcolo differenziale, prescindendo dalla cognizione della sottotangente, converrà aggiustare le formole addotte (§. 184).

190. Le formole ritrovate (§. 181; 184) per le curve geometriche, che hanno le ordinate fra esse paralelle, servono pure per le curve della stessa specie, le cui ordinate sono riferite a un Foco, Ombellico, o Polo.

FIGURA LXX. Sia A M O una curva algebraica, le di cui ordinate MF sono tutte dirette al foco F. Suppongasi tirata la tangente M T alla curva. Dal punto F alla MF s'alzi la perpendicolare F T. In ol-

tre suppongasi, che MO sia una prima flussione dell' arco AM, e che dal centro F sia descritto l' archetto MR, e tirata l' ordinata FO, sarà il mistilineo MOR uguale al triangolo caratteristico MNR, e questo sarà simile al gran triangolo TMF; imperciocchè, essendo RO, RN due prime flussioni, ed NO una seconda flussione (§ 79), ed essendo la prima flussione MR comune alle due superficie MNR, MOR, si potranno considerare come uguali le due prime flussioni RO, RN, e conseguentemente uguali le due superficie MNR, MOR, e però la retta MN coinciderà, e si confonderà colla flussione MO.

Ciò premesso si rifletta, che nel triangolo MNF l' angolo esterno TMF, è uguale ai due interni opposti MNF, MFN; ma essendo l' angolo MFN infinitamente picciolo, sarà l' angolo TMF uguale al TNF (§. 168); e perchè l' angolo MRN = MFT, stantechè sono ambedue retti per costruzione, giacchè l' archetto MR si confonde colla tangente dell' angolo MFR, così sarà l' angolo rimanente NMR uguale all' altro rimanente MTF, e conseguentemente simili i due triangoli MNR, TMF.

Chiamando pertanto $MF = y$, sarà $RN = dy$, e chiamando l'archetto, o la perpendicolare $MR = dx$, s' avrà $NR : MR = MF : FT$, o sia $dy : dx = y : \frac{ydx}{dy} = FT$, formola per la sotto-tangente perpendicolare all' ordinata FM riferita al foco F.

Con un somiglievole ragionamento si troveranno le formole per la tangente, normale, e sottonormale.

Per avere poi il valore di esse linee col mezzo delle ritrovate formole, e della particolare equazione alla curva, basterà operare come si è fatto fin adesso.

191. La norma data per trovare la sottotangente nelle curve algebraiche serve anche per le curve trascendentali; ma la formola della sottotangente di queste curve varia a misura, che esse sono generate con modo diverso. Tutto il divario adunque riducesi nel ritrovare queste formole, del che faremo quì una breve pratica. Sia AMC una curva meccanica coll' asse AB, e colle ordinate paralelle, e sia nota la relazione della sua ordinata MF, o pure PM col cor-

FIGURA LXXI.

rispondente arco AEF della curva genitrice AFK. Per trovare la formola della sottotangente, si supponga tirata la tangente MT, l'ordinata QN infinitamente vicina, e paralella alla PM, e la retta MG paralella all' asse AB. Si chiami $AP = x$, $PM = z$, sarà $PQ = MG = dx$, $GN = dz$; e perchè il triangolo caratteristico MGN è simile al MPT, per le ragioni già altrove addotte, sarà $NG : GM : = MP : PT$, ossia $dz : dx = z : \frac{zdx}{dz} = PT$, formola ricercata.

Se in vece di prendere PM per ordinata si prende FM, e si chiama $FM = u$, $PF = y$, sarà $PM = u + y$, e tirata dal punto F la retta FL paralella all' asse, sarà $LK = dy$, e dal punto M tirata MO paralella all' archetto FK, sarà $NO = du$, $GO = KL = dy$, onde sarà $GN = du + dy$. S'avrà pertanto $NG : GM = MP : PT$, cioè $du + dy : dx = u + y : \frac{\overline{u+y} \times dx}{du+dy} = PT$, altra formola per la sottotangente della curva meccanica colle ordinate paralelle.

192. Per fare uso delle costrutte formole (§. 191), debbasi trovare la sottotangente PT della cicloide AMC generata dal cerchio euclideo AFB, in cui sia il diametro $AB = 2r$, la semicirconferenza $AFB = c$, la retta $BC = a$, l'arco $AEF = t$, l'ascissa $AP = x$, l'ordinata PF del cerchio $= y$, la retta PM $= z$, sarà l'ordinata $MF = z - y$, e quindi $at = cz - cy$ (§. 116) sarà l'equazione alla cicloide, e sarà $\sqrt{2rx - x^2} = y$ l'equazione del cerchio generatore.

Si differenzi l'equazione della cicloide, e s'avrà $adt = cdz - cdy$, onde $dz = \frac{adt + cdy}{c}$, e sostituendo il valore di dz nella prima formola della sottotangente ritrovata (§. 191), sarà $\frac{zdx}{dz} = \frac{czdx}{adt + cdy}$, dalla qual espressione si faranno svanire tutte le flussioni, col esprimere per dx i valori di dt, dy, onde si avrà in termini finiti la sottotangente ricercata.

Per divenirvi si rifletta, che il triangolo caratteristico FKL rettangolo in L somministra $FK = \sqrt{\overline{FL}^2 + \overline{KL}^2}$, ossia dt

$= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Differenziando poi l'equazione al cerchio, si ha $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2xr - x^2}}$, e però, se si sostituirà questo valore di dy nell'equazione $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, sarà

$$dt = \sqrt{\frac{dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}}$$

$= \frac{rdx}{\sqrt{2rx - x^2}}$; col surrogare questi valori di dt, e dy in quello della sottotangente, s'avrà

$$\frac{czdx}{adt + cdy} = \frac{czdx}{\frac{ardx + crdx - cxdx}{\sqrt{2rx - x^2}}}.$$

$= \frac{cz\sqrt{2rx - x^2}}{ar + cr - cx}$, valore della sottotangente PT.

193. Per applicare ai casi particolari la seconda formola (§. 191), suppongasi, che la curva genitrice sia la parabola appoloniana dell'equazione $px = y^2$, e sia $AP = x$, $PF = y$, $FM = u$, l'arco $AEF = t$, la retta $BC = a$, e la semi-

parabola AFKI $= c$; onde abbiasi l' equazione alla cicloide $at = cu$, differenziando quest' equazione, sarà $adt = cdu$, $\frac{adt}{c} = du$, sostituiscasi questo valore di du nella seconda formola (§. 191), s' avrà $\frac{\overline{u+y} \times dx}{du + dy} = \frac{\overline{uc+cy} \times dx}{adt + cdy}$ per la sottotangente, nella qual espressione si faranno svanire le flussioni coll' esprimere per dx i valori di dt, dy. A tal fine si consideri, che il triangolo caratteristico FKL somministra $FK = \sqrt{\overline{FL}^2 + \overline{KL}^2}$, o sia $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Dall' equazione a parabola $y = \sqrt{px}$ si ricava $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, epperò, sostituendo questo valore di dy, sarà $dt = \sqrt{dx^2 + \frac{p^2dx^2}{4px}} = dx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}$.

Se si sostituiranno questi valori di dt, e dy nell' espressione della sottotangente, s'avrà $\frac{\overline{uc+cy} \times dx}{adt+cdy} = \frac{\overline{uc+cy} \times dx}{adx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}} + \frac{cpdx}{2\sqrt{px}}}$

$$=\frac{uc+cy}{a\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}+\frac{cp}{2\sqrt{px}}},$$ valore finito della sottotangente ricercata.

Nell' istessa maniera si opererà per avere la sottotangente di altre curve meccaniche, in cui l'equazione della curva, e quella della sua genitrice saranno diverse, purchè le ordinate di queste curve meccaniche sieno paralelle fra loro.

194. Affine di costruire la formola della sottotangente di quelle curve meccaniche, le cui ordinate sono tutte dirette al medesimo punto F, suppongasi, che A sia l'origine della curva genitrice APB, a cui si è condotta la tangente PH, e che la curva trascendentale generata CMN sia espressa da una equazione, in cui è cognita la ragione tra l'ordinata FM, ed il corrispondente arco AP terminato dalla FM prolungata.

FIGURA LXXII.

S'immagini, che alla curva CMN sia tirata dal punto M la tangente MT, che la retta FTH sia perpendicolare alla FMP, e che, essendo PB una prima flussione dell'arco AP, sia tirata l'ordinata FBQ, e dal centro F siano de-

scritti gli archetti MR, PO, o pure (ciò, che è lo stesso) che dai punti M, P sieno tirate le rette MR, PO perpendicolari alla FQ, sarà il triangolo caratteristico POQ uguale al mistilineo POB (§. 190), e sarà esso triangolo POQ simile al triangolo PHF, ed il triangolo caratteristico MKR sarà simile al triangolo TMF. Si chiamino PH $= a$, FH $= b$, FM $= y$, FP $= z$, l'arco AP $= x$, sarà KR $= dy$, e BP $=$ PQ $= dx$, avremo quindi KR : MR $=$ FM : FT, cioè $dy : MR = y : \frac{y \times MR}{dy} = FT$, formola per la sottotangente, in cui si dee però ancora esprimere in termini analitici il valore di MR.

Per divenirvi si rifletta, che i triangoli simili PHF, QPO somministrano PH : FH $=$ PQ : PO, o sia $a : b = dx : \frac{bdx}{a} = PO$, e che dai settori simili MFR, POF sia FP : PO $=$ FM : MR, o sia $z : \frac{bdx}{a} = y : \frac{bydx}{az} = MR$; sostituendo adunque questo valore di MR nella formola ritrovata, s'avrà $\frac{y \times MR}{dy}$

$= \frac{by^2dx}{azdy}$ per la formola della sottotangente TF delle curve meccaniche, le di cui ordinate sono riferite al foco F.

195. Volendo far uso della formola (§. 194), si opererà come si è praticato per le altre formole.

Per esempio abbiasi la spirale ANME dell' equazione $p^2x = y^3$, la di cui genitrice AOPQ è un cerchio euclideo, e si voglia tirare MT tangente al punto M. Si tiri l' ordinata EMP, che passi pel centro E del cerchio, e la perpendicolare ET, si chiami l' arco AOP $= x$, il raggio del cerchio EP $= z$, e l' ordinata EM $= y$. Siccome le rette a = PH, b = ET comprese nella formola $\frac{by^2dx}{azdy}$ (§. 194) riescono nel caso presente fra esse paralelle, poichè sono ambedue perpendicolari alla EP, così saranno fra loro uguali; onde si potranno scancellare dalla formola, la quale diverrà $\frac{y^2dx}{zdy}$. Si differenzi l' equazione della proposta curva $p^2x = y^3$, e sarà $p^2dx = 3y^2dy$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{p^2}$. Si sostitui-

Figura LXXIII.

sca questo valore di $\frac{dx}{dy}$, s' avrà $\frac{y^2dx}{zdy}$ $= \frac{3y^4}{p^2z}$, e sostituendo p^2x in vece di y^2, sarà $\frac{3y^4}{p^2z} = \frac{3p^2xy}{p^2z} = \frac{3xy}{z} =$ ET, valore della sottotangente ricercata per la curva meccanica EMNA.

196. Rimane a considerarsi un caso particolare delle sottotangenti, e sottonormali, ed è, che, quando il loro valore espresso in forma di frazione è tale, che nel sostituire in vece di x, o di y una quantità determinata, la frazione diventa $\frac{0}{0}$: per esempio siasi ottenuta per la sottotangente, o sottonormale l' espressione $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$; se in questa si supporrà $x = a$, sarà $\frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$ onde sembra, che la curva in quel punto non possa avere sottotangente, o sottonormale, la qual cosa però non è così, poichè tali espressioni hanno un valore reale; per provarlo basterà fare la divisione attuale, e si troverà, che il quoziente di $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$ si esprime per $a + x$; e però,

quando si suppone $x=a$, riesce la detta espressione $= 2a$, e così di altri casi, come si è già avvisato nel libro 2.°

Accade un tal fatto ognivoltachè la curva ha due, o più rami, i quali s' intersecano nel medesimo punto, e che si vuole tirare la tangente nel punto d' intersecazione, come a dire se alla curva NOPQMR, i di cui rami s' intersecano in G, si volesse tirare la tangente al punto G.

FIGURA LXXIV.

Per trovare in questi casi il valore della frazione, che esprime la sottotangente, o la sottonormale, basterà differenziare il numeratore, ed il denominatore, e corretta quindi l' espressione, s' avrà il valore ricercato. Per esempio se il valore di una sottotangente sia risultato $\frac{a^2-x^2}{a-x}$, siccome nel supporre $x = a$ risulta $\frac{0}{0}$, così si prenderà la differenza del numeratore, e sarà $-2xdx$, e $-dx$ quella del denominatore; onde si otterrà la frazione $-\frac{2xdx}{-dx}$, e corretta l' espressione, s' avrà $2x$ pel valore

della sottotangente, che diventa $= 2a$, quando si fa $x = a$.

Se il valore di una sottonormale sia risultato $\frac{c^2 - cx}{c - \sqrt{cx}}$, siccome, quando si fa $c = x$, l' espressione riesce $\frac{0}{0}$, così, differenziando il numeratore, s' avrà $-cdx$, e differenziando il denominatore, sarà $\frac{-cdx}{2\sqrt{cx}}$, e quindi $\frac{-cdx}{\frac{-cdx}{2\sqrt{cx}}} = 2\sqrt{cx}$; e fatto $c = x$, sarà $2c$ il valore della detta sottonormale ricercata.

Sia risultata per sottotangente la ra zione $\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$, se si suppone $x = a$, risulta $\frac{0}{0}$; per ritrovarne il valore, si differenzi il numeratore, e sarà $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{ax^2}}$, similmente presa la differenza del denominatore, sarà $\frac{-3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$, onde avremo

$$\left(\frac{a^3\,dx - 2x^3\,dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{ax^2}}\right) \times - \frac{4\sqrt[4]{a^3x}}{3adx},$$ e

fatto $x = a$, e correggendo l' espressione, risulterà $\frac{16a}{9}$ pel valore ricercato della sottotangente.

Occorrendo, che il valore della frazione ricavata dalla differenziazione riesca di nuovo zero, quando si fa $x = a$, converrà passare a un' altra differenziazione, e così successivamente infinoattantochè si trovi un valore determinato.

197. La data regola (§. 196) serve ancora, quando nel costruire le curve per mezzo di più punti l' ordinata è espressa da una frazione, e che essa ci si rappresenta nella forma $\frac{0}{0}$, allorchè si fissa un determinato valore all' ascissa, o all' ordinata.

Per esempio debbasi costruire la curva dell' equazione

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$ siccome in

questo caso nel fare $x = a$ si ha $y = \frac{0}{0}$,

così, per avere il suo valore, basterà differenziare il numeratore, ed il denominatore della frazione, che esprime l'ordinata y, e sarà

$$\frac{\frac{1}{2} \times \overline{2a^3x - x^4}^{-\frac{1}{2}} \times 2a^3dx - 4x^3dx - \frac{1}{3}a \times \overline{a^2x}^{-\frac{2}{3}} \times a^2dx}{-\frac{1}{4} \times \overline{ax^3}^{-\frac{3}{4}} \times 3ax^2dx}$$

e dividendo sotto e sopra per dx, e ponendo $x = a$, sarà $y = \frac{16a}{9}$, e così si opererà in altri simili casi.

198. Finalmente serve il metodo delle tangenti per esprimere con una equazione differenziale la natura di quelle curve, che non si può esprimere con una equazione algebraica, come avviene nelle curve organiche.

Per divenirvi, nella direttrice A B si notino le parti uguali AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB ec., e presa a piacimento la distanza AE per la sottotangente della curva, s'alzi alla AB la perpendicolare EK di quella lunghezza, che si vuole, da considerarsi questa per l'unità; indi alla AB dai punti F, G, H, B ec. s'alzino altre

FIGURA LXXV.

perpendicolari FL, GM ec., e dal punto A tirata la retta AK, il punto L, in cui AK prolungata incontrerà FL, sarà nella curva; nella stessa maniera dal punto C si tiri CL, e prolungata incontri in M la retta GM, sarà M un altro punto nella curva, e così ancora dal punto D tirata DM, questa, essendo prolungata, intersecherà in N la perpendicolare HN, e sarà N un altro punto della curva, e così si proseguirà per avere altri punti verso P.

Per avere i punti intermedi ai divisati, basterà subdividere le porzioni AC, CD, DE ec., e operare, come è stato detto, e finalmente col moltiplicare in infinito le subdivisioni eguali nella retta AB, o sia col supporre infinitamente picciole, ed uguali le porzioni AC, CD, DE ec., s' avrà un numero infinito di punti K, L, M, N, P per la curva. Da questa costruzione si raccoglie, che la sottotangente AE corrispondente al punto K è uguale alla sottotangente CF corrispondente al punto L, alla sottotangente DG del punto M, in somma che la sottotangente di questa curva è costante.

Per avere l' equazione di questa curva, si chiamino $= dx$ le parti infinitesime costanti nella direttrice AB delle ascisse, la sottotangente AE $=$ CF $= c$, e l'ordinata qualunque FL $= y$, sarà la flussione LR $= dy$, e per la similitudine dei triangoli KLR, CLF s' avrà FL : CF $=$ LR : KR, o sia $y : c = dy : dx$, e quindi $cdy = ydx$, equazione della curva.

199. La curva descritta nell' antecedente paragrafo è la logaritmica stessa, di cui si è parlato (§. 135).

Per dimostrarlo basterà far vedere che, essendo in proporzione aritmetica le ascisse EF, EG ec., le quali hanno il punto d' origine in E, le corrispondenti ordinate FL, GM sono in continua proporzione geometrica. Poiche l' archetto infinitamente picciolo KL si può considerare come una linea retta nata dal prolungamento della tangente AK, saranno simili i due triangoli AKE, ALF, e però sarà EK : FL $=$ EA : FA; per la medesima ragione, essendo simili i triangoli CLF, CMG, sarà FL : GM $=$ FC : CG, ma la sottotangente EA è uguale alla sottotangente FC, ed es-

sendo per costruzione EF = GF, sarà FA = GC; adunque sarà EK : FL = FL : GM, cioè le tre ordinate saranno in proporzione geometrica continua, mentre le corrispondenti ascisse sono in proporzione aritmetica; e siccome la stessa dimostrazione ha luogo per le altre rimanenti successive ordinate, ed ascisse, così si scorge, che la curva descritta è la logaritmica (§. 135).

Si è veduto (§. 137), che la diversità nelle logaritmiche nasce dalla diversa progressione geometrica, che si assume per le ordinate, non ostante che la progressione principj dalla stessa unità. Ora, siccome la stessa diversità si esprime anche per mezzo della sottotangente, e che tale maniera riesce più comoda, così ci serviremo in avvenire della sottotangente per additare le logaritmiche diverse.

200. Non altrimenti si dovrà procedere per avere l' equazione organica, le cui ordinate siano riferite al foco.

Abbiasi la logaritmica spirale FHGB, la cui proprietà sia tale, che tirata a un qualsivoglia punto B la tangente BT, e l' ordinata BF, l' angolo FBT sia sem-

FIGURA LXXVI.

pre lo stesso (§. 139). Per avere l'equazione di questa curva, suppongasi, che BN sia una prima flussione dell'arco HGB, e tirata l'ordinata FN, suppongasi descritto il triangolo caratteristico BNR, il quale sarà simile al triangolo TBF, essendo TF sottotangente perpendicolare all'ordinata FB (§. 190). Si chiami BR $= dx$, RN $= dy$, sarà $\frac{dx}{dy}$ una ragione costante, e quindi $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{c}$ e $cdx = ady$, equazione ricercata, e così si opererà per avere l' equazione di altre curve.

CAPO III.

Del Metodo de' Massimi, e de' Minimi.

201. Serve questo metodo per trovare le tangenti paralelle agli assi, o ai diametri coniugati di una curva, e serve pure per risolvere molti problemi, che difficilmente si risolvebbero per un' altra strada. Noi comincieremo dalla soluzione dei problemi della pri-

ma specie, e passeremo indi a quelli della seconda.

202. Se in una curva qualunque HLMQ, che ha le ordinate paralelle, mentre l'ascissa cresce, o sminuisce di continuo, cresce pure, o isminuisce la corrispondente ordinata sino a un certo punto, dopo del quale mutano ordine le variazioni suddette, l'ordinata, che passa per quel punto, si chiama *la Massima*, o *la Minima*.

Alla curva HMNLQ, in cui le ordinate GM, FN sono rettangole coll' asse, o diametro GT, suppongasi tirata la tangente TM, e la sottotangente TG, e sia formato il triangolo caratteristico MRN simile al triangolo TGM, sarà $GT : GM = RM : RN = dx : dy$. Inoltre sia AB una direttrice delle ascisse HG, HF, e sia KL la massima ordinata nella figura 77, e la minima ordinata nella figura 78: se si suppone, che l'ordinata PM s'accosti parellamente alla KL, si scorge, che la sottotangente GT cresce in modo, che, quando l'ordinata PM giunge in K, la tangente TM dee essere paralella alla retta GT, in cui è notata la sottotan-

FIGURA LXXVII. e LXXVIII.

gente, ed in conseguenza essa sottotangente riesce di una lunghezza infinita. In questo caso la ragione di GT a GM diventa infinita, poichè GM rimane tutt' ora quantità finita, e quindi dee anche essere infinita la ragione di $dx : dy$, cioè la flussione di dy, diventa zero rispetto all'altra dx.

Da queste riflessioni si deduce, che nel caso della massima, o minima ordinata la formola è $dy = \emptyset$.

Per lo contrario se si suppone, che l'ordinata PM, scostandosi parallellamente dalla KL, passi nella situazione AH, ove essa ordinata diventa minima nella figura 77, e massima nella 78, in questo caso la sottotangente GT isminuisce a segno, che, quando l' angolo acuto MTG col continuo crescere diventerà retto, la sottotangente GT riesce zero, e quindi la ragione di GT : GM diventa infinitamente picciola, e per conseguenza anche tale la ragione di $dx : dy$; la qual cosa può avvenire in due maniere, cioè coll' essere $dx = \emptyset$, o pure $dy = \omega$, altra formola generale per trovare le massime, e le minime ordinate di una curva.

203. Due sono pertanto le formole generali per le massime, e le minime ordinate, cioè $dy = \emptyset$, $dy = \omega$.

Ciò posto, se verrà proposta l'equazione di una curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, basterà differenziare l'equazione, e trovato in termini finiti il valore di $\frac{dy}{dx}$, si farà la supposizione di $dy = \emptyset$, oppure di $dy = \omega$, e si avrà il valore dell'ascissa x, a cui compete la massima, o la minima ordinata y, e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima, o la minima ordinata, che si ricerca; dovendosi avvertire, che nella supposizione di $dy = \omega$, cioè di $dx = \emptyset$ la lettera x fa figura di ordinata, quando però nel caso di $dy = \emptyset$ essa x rappresenta l'ascissa.

204. Per addurre alcuni esempi, abbiasi la curva dell'equazione $a^2y^2 = 2ac^2x - c^2x^2$, a cui si cerca la massima ordinata, differenziando, sarà $2a^2ydy = 2ac^2dx - 2c^2xdx$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{2ac^2 - 2c^2x}{2a^2y}$; facendo la supposizione di $dy = \emptyset$, dovrà anche essere l'altro numeratore $2ac^2$

$-2c^2x=0$, e quindi $a=x$. Sostituiscasi nell' equazione proposta in vece di x la sua uguale a, s'avrà $a^2y^2=2a^2c^2-c^2a^2$, ossia $y^2=c^2$, e $y=c$, cioè la massima ordinata sarà $=c$, la qual cosa è conforme a quanto è stato insegnato nelle Sezioni coniche, stantechè la proposta equazione appartiene all' elisse, in cui la maggior ordinata, essendo riferita a uno degli assi, riesce uguale all' altro semiasse.

Sia l' equazione $y^3=2cx^2-x^3$, differenziando, sarà $3y^2dy=4cxdx-3x^2dx$, e $\frac{dy}{dx}=\frac{4cx-3x^2}{3y^2}$, e supponendo $dy=0$, sarà anche l' altro numeratore $4cx-3x^2=0$, e quindi $\frac{4c}{3}=x$, sostituiscasi questo valore nella proposta equazione, sarà $y^3=\frac{32c^3}{9}-\frac{64c^3}{27}=\frac{32c^3}{27}$, e $y=\frac{c}{3}\sqrt[3]{32}$, valore ricercato della massima ordinata y, la quale corrisponde all' ascissa $x=\frac{4c}{3}$.

Abbiasi l' equazione $x^3+y^3=axy$, differenziando, sarà $3x^2dx+3y^2dy=axdy$

$+ aydx$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax}$. Supposto $dy = \emptyset$, sarà anche $ay - 3x^2 = \emptyset$, onde $y = \frac{3x^2}{a}$; sostituiscasi questo valore nella data equazione, e s' avrà $x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 3x^3$, dalla quale si ricava $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$, e surrogato questo valore di x nell'equazione $y = \frac{3x^2}{a}$, si ricaverà $y = \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$, valore della massima ordinata y, la quale corrisponde all' ascissa $x = \frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$.

Sia AMO una mezza cicloide abbreviata, in cui AB $= 2a$, BO $= b$, AP $= x$, PM $= y$, la semicirconferenza ANB $= c$, l' arco AN $= u$, sarà PN $= \sqrt{2ax - x^2}$, ed NM $= y - \sqrt{2ax - x^2}$; ma per la proprietà della curva abbiamo ANB : BO = AN : NM (§. 126), o sia in termini analitici $c : b = u : \frac{ub}{c} =$ NM, adunque $\frac{ub}{c} = y - \sqrt{2ax - x^2}$, equazione della curva, la quale, essendo

Figura LXXIX.

differenziata, somministrerà $\frac{bdu}{c} = dy - \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$; ma nel triangolo caratteristico NRG la flussione NR dell' arco AN è espressa per $\sqrt{\overline{NG}^2 + \overline{GR}^2}$, ed essendo $NG = dx$, $GR = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, col sostituire questi valori analitici, e col correggere l' espressione, s' avrà NR $= du = \sqrt{\overline{NG}^2 + \overline{GR}^2} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, e quindi, fatta la sostituzione nell' equazione differenziata, sarà $\frac{bdu}{c} = \frac{badx}{c\sqrt{2ax - x^2}} = dy - \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{ba + ac - cx}{c\sqrt{2ax - x^2}}$ e supposto $dy = 0$, sarà anche il numeratore $ba + ac - cx = 0$, onde $x = a + \frac{ab}{c}$. Facendo pertanto $AH = x = a + \frac{ab}{c}$, e tirata l' ordinata HK, questa

sarà la massima ricercata. Nell' istessa guisa si potrà operare nelle altre curve sì geometriche, che meccaniche.

205. Il metodo adoperato ci dà confusamente le massime, e le minime ordinate, non potendosi col di lui mezzo distinguere le une dalle altre, salvo che sia noto l' andamento della curva; per la qual cosa, quando non si abbia tale notizia, e si voglia tuttavia distinguere, se il valore ritrovato dell' ordinata sia un massimo, o un minimo, si assegnerà all' ascissa nella proposta equazione un valore per poco maggiore, o minore del ritrovato. Se il valore, che nascerà da quest' operazione, sarà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione sarà dei minimi, e riuscendo all' opposito, sarà dei massimi.

In oltre accade alcuna volta, che tanto la supposizione di $dy = \emptyset$, quanto quella di $dy = \omega$ somministri un medesimo valore dell' ordinata, o dell' ascissa. In questo caso il metodo non determina alcun massimo, o minimo, ma bensì un punto d' intersecazione, o d' incontro di due rami della medesima curva.

206. Finalmente se avvenga, che nè la supposizione di $dy = \emptyset$, nè quella di $dy = \omega$ dia un valore dell' ordinata y, si dovrà conchiudere, che la proposta curva non ha nè massimi, nè minimi. Per esempio sia la curva $y^2 = x^2 - ax$, differenziando, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-a}{2y}$; la supposizione di $dy = \emptyset$ dà $x = \frac{a}{2}$, ma, sostituito questo valore nella proposta equazione, si trova, che il valore di y è immaginario, poichè $y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}}$; la supposizione poi di $dy = \omega$, cioè $dx = \emptyset$ somministra $2y = \emptyset$, adunque la curva non ha nè massima, nè minima: la qual cosa corrisponde a ciò, che è stato insegnato nelle Sezioni coniche intorno l' Iperbola equilatera rapportata agli assi, a cui la proposta equazione appartiene.

Così ancora differenziando l' equazione $px^2 = y^3$, che s' appartiene alla parabola cubica, s' avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2px}{3y^2}$, e supposto $dy = \emptyset$, sarà $2px = \emptyset$, e $x = \emptyset$, e conseguentemente anche zero l' ordinata y, e se si supporrà $dy = \omega$, o sia

$dx = 0$, sarà $3y^2 = 0$. Dal che si conchiude, che la curva non ha nè massissima, nè minima, come già si è potuto osservare nei fatti insegnamenti.

207. Passando ora a far pratica del metodo de' massimi, e minimi nella soluzione de' problemi (§. 201), si dirà, che in queste questioni basta esprimere algebraicamente quella quantità, che si vuole un massimo, o un minimo, e dopo d'aver differenziata quest'espressione, si supporrà uguale al zero il numeratore, e indi il denominatore per cavarne il valore, come già abbiamo fatto per le ordinate massime, e minime delle curve, la qual cosa meglio s' intenderà cogli esempj.

208. Dato il rettangolo ABCD coi lati AB, AD prolungati, si cerca la minima retta EF, che tirar si può pel punto C nell' angolo EAF.

Figura LXXX.

Supposgasi tirata la retta CFE, e sia $AB = a$, $BC = b$, $BF = x$, sarà $CF = \sqrt{b^2 + x^2}$: e perchè sono simili i triangoli BCF, AEF, sarà BF : CF = AF : FE, o sia in termini analitici $x : \sqrt{b^2 + x^2} = a + x : EF = \frac{a + x \sqrt{b^2 + x^2}}{x}$, e supposto

che E F sia anche l'ordinata y di una curva, sarà $y = \frac{\overline{a+x}\sqrt{b^2+x^2}}{x}$, e differenziando questa equazione sarà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}}$$, e supposto $dy = 0$,

sarà $x^3 - ab^2 = 0$, onde $x = \sqrt[3]{ab^2}$. Notato pertanto da B in F questo valore di x, e tirata la retta F C E, questa sarà la minima ricercata.

209. Sulla retta AB presa per ipotenusa costruire un triangolo rettangolo ABD, che sia il massimo di tutti quelli, che si possono descrivere sulla medesima ipotenusa.

FIGURA LXXXI.

Supposto costrutto il ricercato triangolo, si chiami AB $= a$, : AD $= x$. Per la proprietà di questo triangolo sarà

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$$, e

moltiplicando BD per $\frac{AD}{2}$, s' avrà la superficie del triangolo $= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$, e supposto questo valore uguale al quadrato dell' ordinata y di una curva, sarà

$y^2 = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$, o sia $y^4 = \frac{a^2x^2 - x^4}{4}$, e differenziando quest' equazione, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{8y^3}$, e supposto $dy = 0$, sarà $a^2x - 2x^3 = 0$, ed $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, valore che somministra il massimo triangolo.

210. Divisa la retta AB in due parti qualsivoglia nel punto C, si cerca di suddividere una di esse parti, e per esempio BC nel punto D, talmente che il solido fatto dalle parti AC, CD, DB sia il massimo, che far si possa suddividendo BC in due parti.

Figura LXXXII.

Sia AB $= a$, AC $= b$, CD $= x$, sarà DB $= a - b - x$, e quindi il solido sarà AC X CD X DB $= abx - b^2x - bx^2$, e supposto, che questo valore sia uguale al cubo dell' ordinata y di una curva, sarà $y^3 = abx - b^2x - bx^2$, e differenziando, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{ab - b^2 - 2bx}{3y^2}$, e supposto $dy = 0$, sarà $ab - b^2 - 2bx = 0$, e $x = \frac{a - b}{2}$, valore ricercato per avere il massimo solido.

211. Essendo data una curva algebraica, ed un punto nel suo asse, determinare la più corta linea retta, che dal punto dato si possa tirare alla curva.

Sia $px = y^2$ l' equazione della curva ABC, di cui AM è l' asse, e sia D il punto dato. Suppongasi, che la retta BD sia la minima ricercata, e che dal punto B sia tirata BM perpendicolare all' asse, chiamando l' ascissa AM $= x$, l' ordinata MB $= y$, AD $= c$, e la minima BD $= z$, sarà MD $= c - x$. Nel triangolo rettangolo MBD si ha $\overline{BD}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2$, o sia $z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$, e differenziando, sarà $2zdz = 2ydy - 2cdx + 2xdx$; ma dall'equazione $px = y^2$ si ricava $pdx = 2ydy$, sostituiscasi pdx in vece di $2ydy$ nell'equazione differenziale, e s' avrà $2zdz = pdx - 2cdx + 2xdx$, e quindi $\frac{dz}{dx} = \frac{p - 2c + 2x}{2z}$, ma nel caso della minima, supponendo $dz = 0$, sarà anche l' altro numeratore $p - 2c + 2x = 0$, e quindi $x = \frac{2c - p}{2}$. Pertanto, se si noterà questo valore di x da A in M, e

FIGURA LXXXIII.

si tirerà l' ordinata MB, tirando dal punto D al punto B la retta DB, sarà essa BD la minima ricercata. Se avvenga in questa costruzione, che c sia uguale, o minore di $\frac{p}{2}$, il punto B cadrà in A, la qual cosa è conforme alle notizie, che già sono state date intorno la parabola.

212. Da un punto dato D fuori dell' iperbola equilatera ABCN dell' equazione $y^2 = x^2 + ax$ tirare alla data curva la più corta linea retta DB.

FIGURA LXXXIV.

Supponghasi, che tirata DR perpendicolare all' asse KM, il punto R cada dentro la curva, si tiri l' ordinata BM, e la retta BT paralella all' asse, e si chiami l' asse AK $= a$, l' ascissa AM $= x$, l' ordinata MB $= y$, KR $= b$, DR $= c$, DB $= z$, sarà RM $=$ TB $= a + x - b$, DT $= c - y$. Nel triangolo rettangolo DBT si ha $\overline{DB}^2 = \overline{DT}^2 + \overline{TB}^2$, o sia $z^2 = c^2 - 2cy + y^2 + a^2 + 2ax + x^2 - 2ab - 2bx + b^2$; e differenziando quest' equazione, sarà $2zdz = - 2cdy + 2ydy + 2adx + 2xdx - 2bdx$, e sostituendo in questa $2xdx + adx$ in vece

di $2ydy$, e $\frac{-2cxdx - acdx}{y}$ in vece di $-2cdy$, valori ricavati dall' equazione alla curva $y^2 = x^2 + ax$, s' avrà

$$2zdz = -\frac{2cxdx - acdx}{y} + 2xdx + adx$$

$$+ 2adx + 2xdx - 2bdx\text{, e } \frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{2cx - ac + 4xy + 3ay - 2by}{2yz}\text{, e sup-}$$

ponendo $dz = 0$, sarà anche il numeratore $- 2cx - ac + 4xy + 3ay - 2by = 0$, e surrogando in questa $\sqrt{x^2 + ax}$ in vece di y, sarà $\overline{4x + 3a - 2b}\sqrt{x^2 + ax} = 2cx + ac$, e facendo sparire il radicale, si otterrà un' equazione del quarto grado, dalla quale, ricavando il valore di x, si noterà questo da A in M, e tirata l' ordinata MB, la retta, che giungerà i punti B, D, sarà la minima ricercata.

213. Dal punto dato D nell' area della curva A B C dell' equazione $p^2 x = y^3$ tirare alla detta curva la più corta retta BD. Suppongansi tirate le DR, DT fra esse rettangole, e paralelle rispettivamente all' ordinata BM, ed all' asse

FIGURA LXXXV.

AR. Si chiami $BD = z$, $AR = a$, $RD = c$, $AM = x$, $MB = y$, sarà $MR = a - x = TD$, $BT = y - c$. Pertanto nel triangolo rettangolo BDT sarà

$\overline{BD}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{TD}^2$, o sia $z^2 = y^2 - 2cy + c^2 + a^2 - 2ax + x^2$, e differenziando, sarà $2zdz = 2ydy - 2cdy - 2adx + 2xdx$, e sostituendo in questa il valore di dy preso dall'equazione della curva $\frac{p^2 dx}{3y^2} = dy$, sarà $2zdz = \frac{2yp^2dx - 2cp^2dx}{3y^2} - 2adx + 2xdx$, e $\frac{dz}{dx} = \frac{2yp^2 - 2cp^2 - 6ay^2 + 6xy^2}{6y^2 z}$, e supponendo $dz = 0$, sarà anche zero il numeratore diviso per 2, cioè $yp^2 - cp^2 - 3ay^2 + 3xy^2 = 0$. Se in questa equazione in vece di y si sostituirà il suo uguale $\sqrt[3]{p^2x}$ preso dall' equazione alla curva, s'avrà $p^2 \sqrt[3]{p^2x} - cp^2 - 3a\sqrt[3]{p^4x^2} + 3x\sqrt[3]{p^4x^2} = 0$, equazione, che, liberata dall' assimetria, ascende a grado molto elevato, ma se si sostituirà in vece di x il suo valore $\frac{y^3}{p^2}$, s' avrà $yp^2 = cp^2 - 3ay^2 + \frac{3y^5}{p^2} = 0$, equazione di quinto grado,

la quale costrutta somministrerà il valore dell' ordinata B M, e quindi tirata la retta BD, questa sarà la minima ricercata.

CAPO IV.

Dei punti di Flesso contrario, e di Regresso, dei Raggi osculatori, e delle Evolute.

214. Per iscoprire i punti, e le linee, di cui si tratta, convien servirsi delle flussioni del second' ordine.

Si è veduto (§ 170), che le seconde differenze *ddy* delle ordinate parallelle di una curva isminuiscono continuamente, e sono negative, ognivoltachè la curva è concava verso l' asse, e se ne allontana, ma crescono esse differenze, e sono positive, allorchè la curva, che s' allontana dall' asse, è convessa. Da ciò avviene, che se una curva qualunque A M O, la quale s' allontana dall' asse AB andando da A verso M, ha un punto di flesso contrario in M, o di regresso, la seconda differenza d^2y scemerà continuamente da

FIGURA LXXXVI.

A verso M, e da questo sito comincierà a crescere, e continuerà a così fare andando verso O, oppure succederà all' opposito, secondochè la parte AM della curva sarà concava, o convessa. Per la qual cosa la differenza d^2y nel punto M sarà un minimo, o un massimo; e perchè tal differenza non può altrimenti da negativa diventar positiva, o viceversa senza passare per lo zero, o per l' infinito, così nel punto M del massimo, o del minimo sarà $d^2y = \emptyset$, oppure $d^2y = \omega$. Formole per trovare i punti di flesso contrario, e di regresso nelle curve, che hanno le ordinate paralelle, ed in cui una porzione è concava, e l' altra convessa.

215. Data pertanto l' equazione di una curva, e supposto sempre dx costante per maggior brevità, e facilità del calcolo (§. 179), si differenzierà due volte l' equazione, se questa sarà algebraica, e basterà una sola volta, se l' equazione conterrà dei differenziali del primo grado: per mezzo di tali differenziazioni s' avrà il valore di d^2y dato per dx, e questo essendo paragonato al zero, indi all' infinito, somministrerà

i valori dell'ascissa x, ai quali corrisponde l'ordinata y, che incontra la curva nei punti di flesso contrario, o di regresso, ognivoltachè, posti tai valori in luogo di x nell'equazione della curva, riuscirà reale quello di y; ma, se il valore di y sarà immaginario, o altrimenti involgerà contraddizione, la curva non avrà nessuno de' divisati punti. Per esemplificare sia l'equazione

FIGURA LXXXVII $y = \sqrt{\frac{a^3 - a^2 x}{x}}$ della versiera AMQ, in cui $AB = a$, $BP = x$, $PM = y$, differenziando, sarà $dy = \frac{-a^2 dx}{2x\sqrt{ax - x^2}}$, e differenziando di nuovo, preso dx per costante, sarà $d^2y = \frac{3a^3dx^2 - 4a^2xdx^2}{4x\overline{ax - x^2}^{\frac{3}{2}}}$, e supposto $d^2y = 0$, sarà $3a^3dx^2 - 4a^2xdx^2 = 0 = 3a^3 - 4a^2x$, onde $x = \frac{3a}{4} = BP$, e quindi sarà M il punto del flesso contrario ricercato.

La supposizione di $d^2y = \omega$ dà $4x\overline{ax - x^2}^{\frac{3}{2}} = 0$, e quindi $x = a$, il quale, sostituito nell' equazione della

curva, somministra $y = 0$, cioè il punto d' incontro della curva colla direttrice delle ascisse, come già si è veduto nel libro 2.°.

Sia BFG la concoide ordinaria di Nicomede, la di cui equazione è

FIGURA LXXXVIII.

$$y = \sqrt{\frac{a^4 - x^4 + 2a^3x - 2ax^3}{x^2}}$$, cioè BC = CL

$= a$, CE $= x$, EF $= y$, differenziando, sarà $dy = \frac{-x^3dx - a^3dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, sarà $d^2y = \frac{\overline{2a^5 - a^2x^3 - 3a^3x^2} \times dx^2}{x^3 \times \overline{a^2 - x^2}^{\frac{3}{2}}}$, e supposto $d^2y = 0$, sarà anche

$\overline{2a^5 - a^2x^3 - 3a^3x^2} \times dx^2 = 0 = 2a^5 - a^2x^3 - 3a^3x^2$, o sia $x^3 + 3ax^2 = 2a^3$, equazione del terzo grado, la quale risolta secondo le date regole somministrerà il valore di $x =$ CE, e col surrogare questo valore nell' equazione della curva, s' avrà quello di $y =$ EF, onde sarà F il punto del flesso contrario ricercato.

216. Il metodo dato somministra confusamente i flessi contrari, ed i regressi; onde per distinguere gli uni dagli altri converrà osservare l' andamento della curva.

Questo istesso metodo serve ancora per le curve, le cui ordinate sono tutte dirette a un polo, ma le formole sono diverse dalle addotte (§. 214). Noi tralascieremo di maggiormente internarsi in questa materia, e basterà osservare che, quando la curva torna a dietro verso la sua origine, voltando la sua concavità da quella stessa banda, a cui la volgea prima del regresso, allora, sebbene la medesima abbia le ordinate paralelle, più non servono le formole date, essendo necessario per dedurle far uso dei raggi osculatori.

FIGURA LXXXIX.

217. Data la curva A M O generata dallo sviluppo di un' altra curva, trovare il valore dei raggi osculatori nei diversi punti A, M, O d' essa curva, e descrivere l' evoluta genitrice.

Siano paralelle le ordinate nella curva AMO; poichè la natura di questa curva è cognita, si saprà condurre la normale M N Q a ciascun punto M

della medesima. Inoltre, siccome il raggio osculatore è sempre tangente all' evoluta, così, se dal punto O infinitamente vicino al punto M si supporrà tirata un' altra normale OG, questa passerà anche pel punto Q; onde sarà con ciò determinata la lunghezza del raggio QM, e sarà Q un punto dell' evoluta.

Dal punto Q si tiri QF paralella all' asse AB della curva AM, si prolunghi in F l' ordinata MP, e si formi il triangolo caratteristico MRO col lato MR paralello all' asse AB, ed OR paralello all' ordinata PM, e chiamando $AP = x$, $PM = y$, $MF = z$, sarà $MR = dx$, $RO = dy = dz$, ed $MO = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; essendo poi i triangoli MOR, MFQ simili, poichè ciascheduno è simile al triangolo MPN, sarà MR : MO = MF : MQ, cioè $dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = z : z \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$

$= MQ$; ma la differenza fra le due quantità finite MQ, OQ essendo una flussione, sarà zero rispetto ad esse rette; epperò, differenziando la ritrovata espressione di MQ, prendendo dx costante,

s' avrà $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0$, e quindi $dzdx^2 + dzdy^2 = - zdyd^2y$, e $\frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyd^2y} = z$, e sostituito in questa espressione dy in vece del suo uguale dz, sarà, corretta l'espressione, $\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = z =$ MF, e surrogando finalmente questo valore di z nella espressione di MQ, sarà $z\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y} =$ MQ, formola pel raggio osculatore della curva AMO. La retta MF $= \frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y}$ si chiama *Sottosculatrice*, o *Co-raggio.*

218. Per non allontanarsi dal nostro assunto tralascieremo di additare le diverse maniere, colle quali si può ottenere la medesima formola pel raggio osculatore, e tralascieremo pure di costruire quell' altra formola, che serve per le curve, le cui ordinate sono tutte dirette a un polo, ma si ridurremo a dare la regola generale per servirsi delle ritrovate formole.

Data adunque l' equazione di una curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o la sottosculatrice, converrà differenziare l' equazione, affine di avere i valori di dy, dy^2, d^2y, dati per dx; o pure i valori di dx, dx^2, d^2x dati per dy, e sostituirli nelle ritrovate formole, col qual mezzo si avrà l' espressione del raggio osculatore, o del co-raggio in termini finiti, ed affatto liberi da differenziali.

219. Volendo far uso della regola generale, sia A M la curva proposta, la cui equazione è $px = y^2$, e si voglia trovare il suo raggio osculatore, e la sottosculatrice in ciascun punto M, e descrivere la sviluppata K Q L genitrice della proposta curva. Si differenzi l' equazione, e sarà $pdx = 2ydy$, e differenziando di nuovo, preso dx per costante, sarà $2dy^2 + 2yd^2y = 0$; avremo adunque nella prima differenziazione $dy = \frac{pdx}{2y}$ e surrogato questo valore nella seconda, sarà $d^2y = \frac{-dy^2}{y} = \frac{-p^2dx^2}{4y^3}$.

FIGURA XC.

Sostituiti pertanto questi valori nella for-

mola della sottosculatrice M F, sarà

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{dx^2 + \frac{p^2dx^2}{4y^2}}{\frac{p^2dx^2}{4y^3}} = \frac{4y^3 + p^2y}{p^2}$$

e sostituendo px in vece di y^2, e $\sqrt{px}$ in vece di y, sarà $\frac{4y^3+p^2y}{p^2} = \frac{4pxy+p^2y}{p^2}$

$$= \frac{4x\sqrt{px}}{p} + \sqrt{px} = MF.$$

Tirisi pertanto M Q normale alla curva A M, e si tiri l' ordinata M P prolungata indefinitamente. Si tagli da M in F la parte $MF = \frac{4x\sqrt{px}}{p} + \sqrt{px}$, e tirata dal punto F la F Q paralella all' asse A B, s' avrà nel punto d' intersecazione Q la lunghezza MQ del raggio osculatore.

Se in vece di adoperare la formola della sottosculattrice si vorrà far uso della formola $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$ del raggio osculatore, basterà sostituire in essa i ritrovati valori di dy, dy^2, d^2y dedotti dall' equazione della proposta curva, e s' avrà

$$\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\,\frac{3}{2}}}{-dxd^2y} = \frac{\overline{dx^2+\frac{p^2dx^2}{4y^2}}^{\,\frac{3}{2}}}{\frac{p^2dx^3}{4y^3}} = \frac{\overline{4px+p^2}^{\,\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$=$ MQ. Tirata pertanto la MQ normale alla curva AM, e fatto MQ $= \frac{\overline{4px+p^2}^{\,\frac{3}{2}}}{2p^2}$ sarà Q un punto dell' evoluta KQL, e prendendo diversi punti M nella curva AM, e da ciascheduno d' essi tirando la normale QM col notare i corrispondenti valori di x nella ritrovata espressione di MQ, si descriverà col mezzo di più punti l' evoluta KQL.

Se nell' espressione del raggio osculatore $\frac{\overline{4px+p^2}^{\,\frac{3}{2}}}{2p^2}$ si supporà $x = 0$, cancellando il termine $4px$, che diventa ancora zero, sarà $\frac{\overline{p^2}^{\,\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{p}{2} =$ AK, vale a dire, che nel vertice A della parabola AM il raggio osculatore è uguale

al semiparametro, e che l' origine K della sviluppata KQL è distante dal vertice A per la distanza del semiparametro.

220. Per esprimere con una equazione la natura della sviluppata KQL, da un punto Q si tiri QB perpendicolare alla direttrice KB delle ascisse, e si chiami l' ascissa KB $= u$, e l' ordinata BQ $= z$.

Poichè BQ = PF = FM − PM, e che FM $= \frac{4x\sqrt{px}}{p} + \sqrt{px}$, e PM $= y = \sqrt{px}$, sarà $z = \frac{4x\sqrt{px}}{p} + \sqrt{px} - \sqrt{px} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$. Inoltre nel triangolo rettangolo MFQ si ha $\overline{MQ}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2$, sostituiscasi i valori analitici di MQ, ed MF, s'avrà $4x^2 + 2px + \frac{p^2}{4} = \overline{FQ}^2$, e $2x + \frac{p}{2} =$ FQ = BP; ma KB = AP + PB − AK, sicchè, sostituendo i valori analitici, sarà $u = x + 2x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2} = 3x$, ed $x = \frac{u}{3}$. Si scriva questo valore di

x nell' equazione $z = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$, sarà

$z = \frac{\frac{4u}{3}\sqrt{\frac{pu}{3}}}{p}$, e facendo sparire il radicale, sara $z^2p^2 = \frac{16pu^3}{27}$, e correggendo l' espressione, s' avrà $\frac{27pz^2}{16} = u^3$, equazione ricercata della curva KQL, che, come si vede, è la seconda parabola cubica, il cui parametro $= \frac{27p}{16}$

221. Sia la curva proposta AM un' elisse, il di cui asse $AB = a$, il suo parametro $= p$, l' ascissa $AP = x$, e l' ordinata $PM = y$, onde sia la sua equazione $y = \sqrt{\frac{apx - px^2}{a}}$, e si voglia trovare il raggio osculatore MQ, e descrivere la sua sviluppata KQL, differenziando, sarà $dy = \frac{apdx - 2pxdx}{2\sqrt{a^2px - apx^2}}$, e di nuovo differenziando, presa dx per costante, sarà $d^2y = \frac{-a^3p^2dx^2}{4\overline{a^2px - apx^2}^{\frac{3}{2}}}$, e facendo le sostituzioni nella formola del raggio osculatore

$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$, e correggendo l'espressione, si

trovera $MQ = \frac{\overline{4a^2px - 4apx^2 + a^2p^2 - 4ap^2x + 4p^2x^2}^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2}$

Tirata pertanto dal punto M la normale MQ alla curva AM, e fatto MQ della ritrovata lunghezza, sarà Q un punto dell' evoluta, e ripetendo la stessa operazione in altri punti M, si verrà in tale guisa a descrivere l' evoluta KQL.

Se si suppone $x = \emptyset$, la detta espressione diventa $\frac{\overline{a^2p^2}^{\frac{3}{2}}}{2a^3p^2} = \frac{p}{2} =$ AK, cioè a dire, che nell' elisse il raggio osculatore, che corrisponde al vertice A, equivale alla metà del suo parametro.

Se si suppone $p = a$, l' espressione del raggio osculatore $MQ = \frac{\overline{a^4}^{\frac{3}{2}}}{2a^5} = \frac{a}{2}$, qualunque sia il punto M: adunque i raggi saranno tutti uguali tra loro, e l' evoluta sarà un solo punto; e siccome nel caso che $p = a$, l' elisse diventa

un cerchio, così si scorge, che la sviluppata del cerchio è lo stesso suo centro.

Per ultimo, se si vorrà esprimere con una equazione la natura della sviluppata KQL appartenente all'elisse AM, bisognerà trovare il valore della sottosculatrice MF, e operando conformemente al §. 220, si verrà ad avere la ricercata equazione.

222. Dalle cose dette intorno il valore del raggio osculatore, e delle evolute genitrici, si fa manifesto, che se le curve generate riescono algebraiche, saranno pure algebraiche le loro sviluppate, e se ne potrà sempre esprimere la natura con un' equazione, e si osserva in oltre, che qualora la curva generata dallo sviluppo è algebraica, la corrispondente sviluppata è sempre rettificabile, cioè si può assegnare una linea retta uguale ad una qualunque porzione della genitrice: imperciocchè, essendo per costruzione il raggio osculatore QM uguale al corrispondente arco QK della sviluppata più, o meno la retta AK, sarà $MQ \pm AK$ una linea retta uguale in lunghezza all' arco KQ d' essa sviluppata.

LIBRO QUARTO

Del Calcolo Integrale.

223. Il Calcolo *Integrale*, o *Sommatorio* è il metodo di restituire una formola differenziale in quella espressione, di cui ella è la differenza; e però l'integrale di dx sarà x; l'integrale di $dz - dy$ sarà $z - y$ l'integrale di $xdy + ydx$ sarà xy; l'integrale di $3x^2dx$ sarà x^3; l'integrale di $\frac{adx + ydx - xdy}{a^2 + 2ay + y^2}$ sarà $\frac{x}{a+y}$, poichè, differenziando tutti essi integrali, si ricavano di nuovo le proposte formole differenziali.

Nell'istessa guisa, che nell'Algebra ordinaria si può elevare una quantità qualunque a qualsivoglia potestà, ma non si può sempre da una quantità estrarre una proposta radice, così ancora in questi calcoli, sebbene di qualsivoglia quantità si trovi sempre il differenziale, nulla di meno non si può sempre integrare qualsivoglia proposta formola differenziata, anzichè le formole differenziali, che sono di sua natura integrabili, debbono essere

maneggiate diversamente a misura, che sono diversamente composte, o che contengono una, o più variabili: da quì avviene, che il calcolo integrale è un complesso di molti metodi, indirizzi, e ripieghi particolari, in vece, che il calcolo differenziale consiste in un solo metodo generalissimo.

Nel seguente capo si danno le regole per integrare le formole differenziali del primo ordine, le quali, essendo diversamente composte, contengono una sola variabile, e nel capo terzo si darà la maniera d'integrare le formole differenziali del primo ordine, nelle quali s' incontrano due variabili.

CAPO PRIMO.

Delle Regole per integrare le formole differenziali del primo ordine, le quali contengono una sola variabile.

224. Gl' integrali, che si ricavano dalle formole differenziali, riescono *Precisi*, o *Approssimati*.

L' integrale è preciso, allorchè si esprime con una quantità finita, ed assegnabile, ed allora si chiama *Algebraico*; ma, se l' integrale dedotto dalla formola differenziale sarà eccedente, o mancante dal preciso valore, si dirà approssimato, ed in ispecie si dirà, che l' integrale è approssimato per via di una serie, se per esprimerlo si adopererà qualche serie, in cui essendo il numero de' termini infinito, se ne trova la somma per approssimazione, o pure nell' integrale approssimato si suppone la rettificazione, o la quadratura di una qualche curva, che non si sa rettificare, nè quadrare, come sono il cerchio euclideo, l' iperbola appoloniana ec. Final-

mente si dirà *Trascendentale* l' integrale approssimato, se per esprimerlo si farà uso dei logaritmi.

Il segno S indica, che della proposta formola differenziale si dee trovare l' integrale, e così $S\,dx$ addita, che della formola differenziale dx si dee trovare l' integrale, l' espressione $S\overline{cdx-2xdx}$ significa, che si dee trovare l' integrale della formola $cdx - 2xdx$, e così di altre espressioni differenziali precedute dal segno suddetto, che dicesi *Somma*, o *Integrale*.

225. Incominciando dalle regole per ottenere gli integrali algebraici, si dirà che, se la quantità differenziale sarà semplice, sia poi questa moltiplicata, o divisa per quantità costanti, se ne otterrà l' integrale col solo scancellare la caratteristica d, e nella quantità restante s' avrà l' integrale ricercato; e però del differenziale dx l' integrale sarà x, di $-dz$ l' integrale sarà $-z$, di cdy l' integrale sarà cy, di $-a^3dx$ l' integrale sarà $-a^3x$, di $\frac{dy}{a}$ l' integrale sarà $\frac{y}{a}$,

di $\frac{-c^3dz}{f+g}$ l'integrale sarà $\frac{-c^3z}{f+g}$, di $\frac{a^2bdx}{a-c}$, l'integrale sarà $\frac{a^2bx}{a-c}$, e così di altre espressioni differenziali di questa specie.

226. Ma quì fa d'uopo avvertire, che siccome nel differenziare una quantità svaniscono le costanti, che talvolta sono congiunte colle variabili (§. 172), così deesi ad essi integrali aggiugnere una costante a piacimento, il cui valore, come vedremo nel seguente capo, si determina poi nei casi particolari, e così l'integrale compito di dx sarà non solo x, ma ancora $x \pm c$, l'integrale compito di a^2dz sarà non solo a^2z, ma ancora $a^2z \pm b^3$, lo stesso vale per qualunque altra formola.

Nel trovare adunque l'integrale delle formole differenziali si dovrà sempre aggiugnere una qualche costante, affinchè l'espressione integrale abbia tutta l'universalità, di cui è capace, epperò, se nel seguito si ommetterà talvolta di così fare, ciò sarà unicamente per ischivare le ripetizioni.

227. Per integrare una formola espressa da un prodotto formato di una variabile elevata a qualunque potestà, e moltiplicata nella differenza della stessa variabile, si aggiugnerà un' unità all' esponente della variabile, e scancellata la flussione, si dividerà il tutto pel nuovo esponente, il quoziente, che ne risulterà, sarà l' integrale ricercato; e però l' integrale di $5x^4dx$ sarà $\frac{5x^5}{5} = x^5$, o pure $x^5 \pm a^5$, l' integrale di a^2y^3dy sarà $\frac{a^2y^4}{4}$, o pure $\frac{a^2y^4}{4} \pm c^6$; l'integrale di $\frac{5}{3} z^{\frac{2}{3}} dz$ sarà $z^{\frac{5}{3}}$, o pure $z^{\frac{5}{3}} \pm b^2$, l'integrale di $mx^{m-1} dx$ sarà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = x^m \pm c^m$; di $a^3y^{\frac{m}{n}} dy$ sarà $\frac{a^3y^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{na^3y^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$, o pure $\frac{na^3y^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} \pm c^{\frac{m+n}{n}}$.

Questa medesima regola serve per integrare le frazioni, nel cui numera-

tore si trova la differenza della variabile moltiplicata eziandio con qualche costante, e nel denominatore evvi la potestà della variabile, bastando perciò far passare il denominatore nel numeratore, mutando il segno all' esponente.

Per esempio, se si debba integrare $\frac{dx}{x^3}$, esprimendo questo rotto in quest' altra maniera $x^{-3} dx$, per mezzo della data regola, cioè $\frac{dx}{x^3} = x^{-3} dx$, si troverà, che il suo integrale è $\frac{x^{-3+1} dx}{-2}$ $= \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2x^2} \pm a$; l' integrale di $\frac{cdy}{y^4}$ $= cy^{-4} dy$ sarà $\frac{cy^{-3}}{-3} = \frac{-c}{3y^3} \pm f$, l'integrale di $\frac{-a^2 dy}{y^7} = -a^2 y^{-7} dy$ sarà $\frac{-a^2 y^{-6}}{-6} = \frac{a^2}{6y^6} \pm m$, e così di altri.

228. Dalla data regola si dee però

eccettuare il caso, in cui la variabile ha l' unità negativa per esponente, o pure, essendo positivo questo esponente, la variabile è il denominatore di un rotto, nel cui numeratore si trova la flussione d' essa variabile: per esempio $cy^{-1}dy = \frac{cdy}{y}$: imperciocchè in questo caso, eseguendo la data regola, si ha $\frac{cy^{-1+1}}{-1+1} = \frac{cy^{0}}{0}$, espressione di quantità infinita, che nulla ci fa conoscere. In simile riscontro adunque fa d' uopo raccorrere ad altri spedienti, servendosi degli integrali trascendentali, o delle serie infinite, la qual cosa si tratterà, dopo d' aver data la maniera di trovare gl' integrali algebraici di varie specie di formole differenziali.

229. La data regola (§. 227) serve anche per le frazioni, il cui denominatore è una quantità costante, o riducibile ad essere tale.

Suppongasi in primo luogo, che il numeratore della frazione sia la quantità semplice $\frac{b^2x^3dx}{ac}$ il suo integrale sarà $\frac{b^2x^4}{4ac}$,

o pure $\frac{b^2x^4}{4ac} \pm m^4$; della formola $\frac{a^2y^5dy}{c^3+f^3}$ l' integrale sarà $\frac{a^2y^6}{6\times\overline{c^3+f^3}}$, o pure $\frac{a^2y^6}{6\times\overline{c^3+f^3}} \pm b^5$; della formola $\frac{z^4dz}{a^2z^2-b^2z^2}$, siccome si può ridurre a quest' altra $\frac{z^2dz}{a^2-b^2}$, l' integrale sarà $\frac{z^3}{3\times\overline{a^2-b^2}}$, e così ancora della formola $\frac{x^m dx}{c^2x^n}$, dopo d' essere convertita in quest' altra espressione $\frac{x^{m-n}dx}{c^2}$, il suo integrale sarà $\frac{x^{m-n+1}}{\overline{m-n+1}\times c^2}$ $\pm f$; della formola $\frac{ady}{c^2y^4} = \frac{ay^{-4}dy}{c^2}$ l' integrale sarà $\frac{ay^{-3}}{-3c^2} = \frac{-a}{3c^2y^3}$; della formola $\frac{-m^2x^{-5}dx}{ac-cg}$ l' integrale sarà $\frac{-m^2x^{-4}}{-4\times\overline{ac-cg}}$ $= \frac{m^2}{4x^4\times\overline{ac-cg}}$, e così di altre espres-

sioni della divisata specie, siano poi esse in forma d' intero, o di rotto.

230. Se il numeratore sarà una quantità composta, converrà spezzare il rotto, formando altrettante frazioni, quanti sono i termini nel numeratore; dopo del che si troverà l' integrale di ciascheduna di queste frazioni, e tutti essi integrali uniti insieme per mezzo dei convenienti segni somministreranno l' integrale del rotto composto.

Sia proposto da integrare la frazione $\frac{cx^2dx - a^2xdx}{m^2}$, spezzando questo rotto, s' avrà $\frac{cx^2dx}{m^2} - \frac{a^2xdx}{m^2}$, il di cui integrale sarà $\frac{cx^3}{3m^2} - \frac{a^2x^2}{2m^2} \pm b^2$; per integrare $\frac{cy^2dy + y^3dy - a^2ydy}{m-n}$, spezzata la frazione, come è stato detto, sarà $\frac{cy^2dy}{m-n} + \frac{y^3dy}{m-n} - \frac{a^2ydy}{m-n}$, e integrando ciascun termine, avremo $\frac{cy^3}{3m-3n} + \frac{y^4}{4m-4n} - \frac{a^2y^2}{2m-2n}$ per l' integrale della proposta frazione.

Se la formola da integrarsi fosse espressa in questa maniera $\frac{bx^5dx - cx^3dx}{ax^2 + cx^2}$, siccome, correggendo l'espressione, si ha $\frac{bx^3dx - cxdx}{a+c}$, in cui il denominatore è costante, così si troverà l'integrale nel modo spiegato.

231. Passando ora alle regole per integrare le espressioni differenziali, che hanno, o sono riducibili alla formola mx^pdx $\times \overline{c^r \pm x^r}^{\frac{n}{q}}$, la medesima sarà sempre integrabile in questi tre casi.

1.° Quando $\frac{n}{q}$ essendo un numero intiero, o fratto, positivo, o negativo sarà l'incognita fuori del segno elevata ad una potestà minore d'un' unità di ciò sia quella sotto il segno.

2.° Quando $\frac{n}{q}$ sarà un numero intiero, e positivo.

3.° Sarà sempre integrabile, ognivoltachè accresciuto l'esponente dell'incognita, che è fuori del segno, d'un' unità, diviso questo per l'esponente della variabile, che è sotto il segno, dà di quoziente un numero intiero positivo.

In questi tre casi la formola s' integrerà nella seguente maniera.

Nel 1.° caso basta accrescere l' esponente $\frac{n}{q}$ d' un unità, e dividere il tutto per il nuovo esponente moltiplicato per il differenziale della quantità sotto il segno, e correggere quindi l' espressione; oppure più speditamente trovare qual rapporto abbia il differenziale fuori del segno col differenziale della quantità sotto il segno, e trovare in questa maniera il valore di m; moltiplicare quindi questo valore di m per la quantità sotto il segno elevato all' esponente $\frac{n}{q} + 1$, e dividere il tutto per lo stesso esponente: per esempio $mrx^{r-1} \times \overline{c^r + x^r}^{\frac{n}{q}}$

Nel 2.° caso, basta elevare la quantità sotto il segno alla potestà $\frac{n}{q}$, moltiplicare inoltre questa potestà per la quantità fuori del segno, e quindi integrare termine per termine separatamente, per esempio $mx^3dx \times \overline{c^2 + x^2}^2$ questa regola patisce eccezione, ed è nel caso, che

dopo le attuali moltipliche vi si ritrovasse l' incognita elevata alla potestà — 1 ; in questo caso s' integra quel termine per mezzo de' logaritmi; per esempio $mx^{-3}dx$

$\times \overline{c^2 + x^2}^2$.

Nel terzo finalmente basta eguagliare la quantità sotto il segno ad un' altra incognita , differenziare quest' equazione , trovare il valore della differenza dell' incognita data in termini espressi per questa nuova incognita : fare le debite sostituzioni , ed integrare in questa maniera la nuova quantità , e ritornando a sostituire i valori dati , s' avrà con ciò integrato quanto era proposto.

Notisi che questo caso abbraccia gli altri due , ed è in questa maniera generale , mentre gli altri due sono semplicemente particolari.

Per dimostrare, che sia generale agli altri due casi basta prendere gli esempj

$mx^3dx \times \overline{c^2 + x^2}^2$ per il secondo caso :

ed $mrx^{r-1} \times \overline{c^r + x^r}^{\frac{n}{q}}$ per il primo , ed integrarli quindi per via di sostituzioni.

232. Si ottengono gl' integrali trascendentali per mezzo della logaritmica; poichè in essa le ascisse x corrispondono alle ordinate y in quella guisa appunto, che nelle Tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie dei numeri naturali (§. 135). Chiamata pertanto c la sottotangente della logaritmica, sarà $\frac{cdy}{y} = dx$ la sua equazione (§. 198), e integrando, sarà

$S\frac{cdy}{y} = x$, ma $x = l.y$ (§. 138), adunque $S\frac{cdy}{y} = l.y$ preso nella logaritmica della sottotangente $= c$.

Descritta pertanto la logaritmica PGHKL colla data sottotangente, se in essa l' ordinata AG esprime l' unità, dopo d' aver tirata coll' intervallo $= y$ la retta KM paralella all' assintoto AD, e dal punto K tirata KC perpendicolare alla AD, sarà l' ascissa AC $= x = l.y = S\frac{cdy}{y}$. Medesimamente l' integrale di $dx = \frac{dy}{y}$ sarà $x = l.y = S\frac{dy}{y}$, preso

FIGURA XCI.

esso logaritmo nella logaritmica, la cui sottotangente sia $= 1$.

233. Raccogliendosi dall' antecedente paragrafo, che il differenziale di un logaritmo sia una frazione, in cui il numeratore è il prodotto della sottotangente nella prima flussione del denominatore, e il denominatore della frazione è la quantità istessa, di cui si ha il logaritmo, consegue, che il differenziale di $- l. y = l. y^{-1} = l. \frac{1}{y}$ sia $\frac{-dy}{y}$; che il differenziale di $l. \overline{c+y}$ sia $\frac{dy}{c+y}$; che il differenziale di $l. \overline{c-y}$ sia $\frac{-dy}{c-y}$; che il differenziale di $- l. \overline{c+y} = l. \overline{c+y}^{-1} = l. \frac{1}{c+y}$ sia $\frac{-dy}{c+y}$; e che il differenziale di $- l. \overline{c-y} = l. \overline{c-y}^{-1} = l. \frac{1}{c-y}$ sia $\frac{dy}{c-y}$, intendendosi essi logaritmi presi nella logaritmica della sottotangente $= 1$; ed ove la sottotangente fosse $= c$, il numeratore degli addotti differenziali si dovrebbe moltiplicare per c.

Le addotte formole differenziali sono le più semplici, ed è necessario rendersele familiari, affinchè nella pratica se ne sappia tosto conoscere i loro integrali, a' quali si dovrà sempre aggiugnere una costante arbitraria, da determinarsi poi questa nei casi particolari (§. 226).

234. Le formole differenziali più composte delle divisate (§. 233), e che appartengono a integrali trascendentali, si rappresentano in forma di rotto, o di una quantità composta, che si può ridurre in forma di rotto. Di tali formole si otterrà l' integrale, ognivoltachè il numeratore sarà il differenziale preciso, o qualche proporzionale del differenziale del denominatore; bastando perciò scrivere il logaritmo del denominatore moltiplicato pel numero, che addita la ragione tra il numeratore, e il differenziale preciso del denominatore.

Per esempio l' integrale di $\frac{2xdx}{a^2+x^2}$ sarà $1 \times l.\overline{a^2+x^2}$, poichè, essendo il numeratore il differenziale preciso del denominatore, s' avrà una ragione d' uguaglianza, onde verrà espressa per l' unità.

L' integrale di $\frac{12y^2dy}{c^3+y^3}$ sarà $4\ l.\overline{c^3+y^3}$, poichè il numeratore è quadruplo del differenziale del denominatore, l' integrale di $\frac{-y^2dy}{c^3-y^3}$ sarà $\frac{1}{3}\ l.\ \overline{c^3-y^3}$, poichè il numeratore è la terza parte del differenziale del denominatore.

Per le medesime ragioni l' integrale di $\frac{\frac{3}{4}\ ady + \frac{3}{2}\ ydy}{ay+y^2}$ sarà $\frac{3}{4}\ l.\ \overline{ay+y^2}$ $= l.\ \overline{ay+y^2}^{\frac{3}{4}}$; l'integrale di $\frac{\frac{8}{3}\ y^3dy - \frac{2c^3dy}{3}}{y^4-c^3y}$ sarà $\frac{2}{3}\ l.\ \overline{y^4-c^3y} = l.\ \overline{y^4-c^3y}^{\frac{2}{3}}$; l' integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{ax-x^2}$ sarà $\frac{1}{2}\ l.\ \overline{ax-x^2}$ $= l.\ \overline{ax-x^2}^{\frac{1}{2}} = l.\sqrt{ax-x^2}$ presi tutti essi logaritmi nella logaritmica della sottotangente $= 1$.

Nella stessa maniera della formola $\frac{ay^2dy}{c^3+y^3}$ l' integrale sarà

$\frac{a}{3}\, l.\, \overline{c^3+y^3} = l.\, \overline{c^3+y^3}^{\frac{a}{3}}$, poichè $\frac{a}{3}$ addita la ragione tra il numeratore, e il differenziale preciso del denominatore; l'integrale di

$$\frac{6acx^2dx - 8cx^3dx}{ax^3 - x^4} \text{ sarà}$$

$2c\, l.\, \overline{ax^3 - x^4} = l.\, \overline{ax^3 - x^4}^{2c}$, da prendersi essi logaritmi nella logaritmica della sottotangente $= 1$.

235. Qualora il numeratore della frazione non è proporzionale al differenziale del denominatore, occorrer possono diversi casi, cioè, che il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, oppure che alcuni di essi, o tutti siano immaginari. Inoltre, se essendo tutti reali i componenti del denominatore, possono questi essere fra loro uguali, o disuguali, esigendosi per ciascun caso particolare i suoi adattati ripieghi. Noi tralascieremo d'inoltrarsi in tutti questi casi, e ne esamineremo un solo per far vedere, che l'integrale di una formola differenziale può talvolta essere in parte algebraico, ed in parte trascendentale.

Debbasi integrare la formola $\frac{y^3 dy}{\overline{y-c}^3}$, in cui il numeratore non è proporzionale del differenziale del denominatore, ma questo ha le sue tre radici reali, ed uguali. Pongasi la sua radice $y-c = z$, sarà $y = z + c$, $dy = dz$. Sostituiscansi questi valori nella proposta formola, e sarà $\frac{y^3 dy}{\overline{y-c}^3} = \frac{\overline{z^3 + 3cz^2 + 3c^2z + c^3} \times dz}{z^3}$, e spezzando questo rotto in tanti rotti semplici, e correggendo l'espressione, sarà $dz + \frac{3cdz}{z} + \frac{3c^2dz}{z^2} + \frac{c^3dz}{z^3}$, e integrando, s'avrà $z + 3\, l.\, z - \frac{3c^2}{z} - \frac{c^3}{2z^2}$, e restituendo in luogo di z il suo valore dato per y, sarà $y - c + 3\, l.\, \overline{y-c}$ $- \frac{3c^2}{y-c} - \frac{c^3}{2 \times \overline{y-c}^2}$ l'integrale della proposta formola, che, come si vede, è in parte algebraico, ed in parte trascendentale; dovendosi prendere il logaritmo $3\, l.\, \overline{y-c}$ nella logaritmica della sottotangente $= c$.

236. Dalle cose fin quì dette intorno il calcolo integrale si raccoglie;

1.° Che le sostituzioni sono di un grand' uso in questo calcolo.

2.° Che la regola per accertarsi, se non siasi commesso errore nel ritrovare gl' integrali delle formole differenziali, consiste nel differenziare il ritrovato integrale, ed ove questo restituisca la proposta formola differenziale, saremo certi d' aver operato giustamente.

237. In tre maniere si ottengono le serie, cioè colla divisione, coll' estrazione di radice, e colla combinazione d' ambedue le operazioni.

Per ridurre una frazione a serie infinita, basta dividere il numeratore pel denominatore, usando la regola ordinaria della divisione, e di nuovo dividere il rimanente, e così di mano in mano proseguire in infinito, il quoziente, che risulta da tale operazione, somministra una serie di un numero infinito di termini, la cui somma è uguale alla proposta frazione.

Convien però avvertire di porre nel denominatore della proposta frazione per primo termine quello, che è il maggiore,

affinchè la serie riesca convergente, cioè a dire, che si vada accostando sempre più al giusto valore, a misura che s'aggiungono nuovi termini, poichè, altrimenti facendo, la serie riuscirebbe divergente, cioè si scosterebbe vie più dal valore ricercato, a misura che s'accrescerebbe il numero dei termini.

Operando pertanto secondo la data regola, avverrà, che la frazione $\frac{f}{g+h}$ ridotta in serie infinita, supposto $g > h$, sarà
$$\frac{f}{g+h} = \frac{f}{g} - \frac{fh}{g^2} + \frac{fh^2}{g^3} - \frac{fh^3}{g^4} + \text{ec.},$$ così ancora la frazione $\frac{f}{g-h}$ ridotta in serie infinita darà
$$\frac{f}{g-h} = \frac{f}{g} + \frac{fh}{g^2} + \frac{fh^2}{g^3} + \frac{fh^3}{g^4} + \text{ec.}$$
Questi due esempi potranno servire di formola generale per tutti gli altri casi.

238. Per ridurre una quantità radicale composta in serie infinita, basta estrarre dal primo termine la radice indicata dall'esponente, e indi proseguire in infinito l'operazione nella solita maniera dell'estrazione delle radici, come è sta-

to insegnato negli Elementi dell' Algebra: quindi è, che il radicale $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ ridotto in serie infinita somministrerà
$\sqrt{a^2 \pm x^2} = a \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ ec.

239. Col mezzo della seguente formola si potranno ottenere con maggior facilità le serie infinite, che dipendono dai radicali $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m\,AQ}{n}$
$+ \frac{m-n \times BQ}{2n} + \frac{m-2n \times CQ}{3n} + \frac{m-3n \times DQ}{4n}$ ec.

In questa formola l'espressione P+PQ rappresenta la quantità data, $\frac{m}{n}$ esprime l' esponente numerico, P il primo termine, Q il rimanente di tutti gli altri termini diviso pel primo, e ciascheduna delle lettere A, B, C, D ec. significa rispettivamente il termine anteriore, di modo che, per A s' intende $P^{\frac{m}{n}}$, per B s' intende $\frac{m\,AQ}{n}$, per C s' intende $\frac{m-n \times BQ}{2n}$ ec.

240. Per esemplificare debbasi ridurre in serie il radicale

$\sqrt{a^2+x^2} = \overline{a^2+x^2}^{\frac{1}{2}}$, sarà $P=a^2$, $Q=\frac{x^2}{a^2}$

$m=1$, $n=2$, e però, facendo le debite sostituzioni nella formola generale, s'avrà $\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$

$- \frac{5x^8}{128a^7}$ ec.

Debbasi ridurre in serie infinita il radicale $\sqrt[5]{a^5+a^4x-x^5} = \overline{a^5+a^4x-x^5}^{\frac{1}{5}}$,

sarà $P=a^5$, $Q=\frac{a^4x-x^5}{a^5}$, $m=1$, $n=$

5, e però, fatte le debite sostituzioni, sarà

$\overline{a^5+a^4x-x^5}^{\frac{1}{5}} = a + \frac{a^4x-x^5}{5a^4}$

$- \frac{2a^8x^2+4a^4x^6-2x^{10}}{25a^9}$ ec.

Colla medesima regola si potranno anche convertire in serie infinita le frazioni, che hanno un radicale composto per denominatore. Per esempio abbiasi

la frazione $\frac{c}{\sqrt[3]{y^3-a^2y}}$ da convertirsi in serie, basterà per ciò far passare il denominatore nel numeratore scritto in forma di potestà, e s' avrà

$\frac{c}{\sqrt[3]{y^3-a^2y}} = c \times \overline{y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{3}}$, e però fatto $P = y^3$, $Q = -\frac{a^2}{y^2}$, $m = -1$, $n = 3$, sostituendo, sarà $c \times \overline{y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{3}} = \frac{c}{y} + \frac{a^2c}{3y^3} + \frac{2a^4c}{9y^5} + \frac{14a^6c}{81y^7}$ ec., e così di tutti gli altri casi.

241. Colle fatte premesse sarà facile d' integrare una qualsivoglia frazione differenziale, bastando perciò convertirla in una serie infinita.

Sia da integrarsi la formola $\frac{cdx}{a+x}$; ridotta in serie convergente la frazione $\frac{c}{a+x}$ (§. 152), e moltiplicato ciascun numeratore per dx, s' avrà

$$\frac{cdx}{a+x} = \frac{cdx}{a} - \frac{cxdx}{a^2} + \frac{cx^2dx}{a^3} - \frac{cx^3dx}{a^4}\ \text{ec.},$$ e

integrando, sarà

$$S\,\frac{cdx}{a+x} = \frac{cx}{a} - \frac{cx^2}{2a^2} + \frac{cx^3}{3a^3} - \frac{cx^4}{4a^4}\ \text{ec.}$$

Sia da integrarsi la formola $\frac{cdy}{y}$ (§. 232), fatta $y = b + z$, intendendo per b una costante qualsivoglia, e per z un'altra incognita, sarà $\frac{cdy}{y} = \frac{cdz}{b+z}$, ridotta in serie convergente la frazione $\frac{c}{b+z}$, e moltiplicato ciascun numeratore per dz, sarà

$$\frac{cdz}{b+z} = \frac{cdz}{b} - \frac{czdz}{b^2} + \frac{cz^2dz}{b^3} - \frac{cz^3dz}{b^4} + \text{ec.},$$ e

integrando come avanti, sarà

$$S\,\frac{cdz}{b+z} = \frac{cz}{b} - \frac{cz^2}{2b^2} + \frac{cz^3}{3b^3} - \frac{cz^4}{4b^4} + \text{ec.},$$

e sostituendo in vece di z il suo uguale $y - b$, sarà $S\,\frac{cdy}{y} = \frac{c \times \overline{y-b}}{b} - \frac{c \times \overline{y-b}^2}{2b^2}$

$$+ \frac{c \times \overline{y-b}^3}{3b^3} - \frac{c \times \overline{y-b}^4}{4b^4} + \text{ec.}$$

Sia la formola $\frac{cdx}{\sqrt[5]{\overline{x+a}^3}}$ da integrarsi, ridotta questa in serie, sarà

$$\frac{cdx}{\sqrt[5]{\overline{x+a}^3}} = \frac{cdx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3cxdx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12cx^2dx}{25a^{\frac{13}{5}}}$$

— ec., e integrando, sarà

$$S\frac{cdx}{\sqrt[5]{\overline{x+a}^3}} = \frac{cx}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3cx^2}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12cx^3}{75a^{\frac{13}{5}}}$$

— ec., e così si faccia di qualunque altra proposta formola.

242. Se le serie così ritrovate, che esprimono l'integrale delle proposte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, saranno di valore infinito, sarà infinito l'integrale delle proposte formole differenziali, e se esse serie saranno di valore finito, e di più sommabili, cioè a dire che si sappia ritrovare il valore di esse serie, quantunque composte di termini infiniti di numero, lo che molte volte succede, e ne abbiamo un riscontro nelle progressioni geometriche decrescenti all'infinito, si avrà in quantità finita, ed assegnabile,

e però algebraico l'integrale delle proposte formole differenziali; ma se le serie, essendo di valore finito, non saranno sommabili, in questo caso s'accosteremo sempre più al giusto, a misura, che si prenderà un maggior numero di termini.

Si dee quì osservare, che il metodo delle serie per integrare qualsivoglia formola differenziale espressa in forma di rotto, o che contiene radicali, è generale, finchè s' accontentiamo di approssimazioni, ma quando si cerca di conoscere, se la serie sia di valore finito, o infinito, e se sia, o no sommabile, fa di mestieri adoperare molte regole particolari.

CAPO II.

Dell' Uso delle date Regole.

243. Il Calcolo Integrale spiegato nel capo antecedente si adopera per quadrare superficie piane, rettificare linee curve, appianare superficie concave, o convesse, cubare solidi, e per trovare il logaritmo di qualsivoglia proposto numero.

Dicesi *Quadrare una superficie*, allorchè si assegna un' area rettilinea uguale alla proposta superficie curvilinea, o mistilinea.

La regola per quadrare una superficie è la seguente. Sia AMN una curva qualsivoglia riferita all' asse A B G colle sue coordinate rettangole. Si chiami A B $= x$, B M $= y$, e suppongasi tirata l' ordinata O Q infinitamente vicina alla BM, sarà B Q $= dx =$ M R paralella all' asse AG, e quindi il rettangolo BMRQ $= ydx$ sarà l' elemento, o prima flussione della superficie mistilinea A B M (§ 83), non facendosi conto del triangolo caratteristico MOR, atteso, che è una flussione del secondo genere.

FIGURA XCII.

Il ritrovato elemento ydx serve di formola generale per quadrare le superficie curvilinee, e mistilinee, purchè s' abbia l' equazione particolare della curva riferita all' asse, di cui cercasi la quadratura, bastando perciò da questa equazione ricavare il valore di y dato per x, e per le costanti dell' equazione, e sostituire questo valore nella formola ydx, l' integrale di quest' espressione somministrerà la quadratura ricercata.

244. Sia AMN una parabola appoloniana dell' equazione $ax = y^2$, la di cui ascissa AB $= x$, e l' ordinata BM $= y$, sarà $y = \sqrt{ax}$, e sostituito questo valore di y nella formola ydx, s'avrà

$\sqrt{ax} \times dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, e integrando

(§. 227), sarà $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{ax} + c$ la

superficie ABM. La quantità c è la costante, che nelle integrazioni deesi aggiungere (§. 226), e che ora fa d'uopo di determinare. A questo fine riflettasi, che nel punto A, ove $x = 0$, lo spazio AMB diventa anche zero, adunque l' in-

tegrale $\frac{2}{3} x \sqrt{ax} + c$, che esprime questo spazio, dee pure essere zero, epperò sarà $\frac{2}{3} \, 0 \, \sqrt{a0} + c = 0$, e quindi $c = 0$; la qual cosa dimostra, che in questo caso non si deve aggiugnere costante alcuna all' integrale, perchè è compito; onde il medesimo sarà $\frac{2}{3} \; x \sqrt{ax}$, nella quale espressione, sostituendo y in vece di $\sqrt{ax}$, si avrà $\frac{2}{3} \; xy$ per la superficie mistilinea AMB, cioè a dire, che la superficie della parabola appoloniana è uguale ai due terzi di un rettangolo formato dall' ascissa nell' ordinata.

Se nella detta parabola le ascisse principieranno in B, e si voglia la quadratura della superficie BMNG, chiamando AB$=f$, BG$=x$, GN$=y$, l'equazione suddetta diventerà $af + ax = y^2$, onde $y = \sqrt{af+ax}$, e sostituito questo valore nella formola ydx, sarà $dx\sqrt{af+ax}$, e integrando (§. 231), sarà

$$2 \; \frac{\overline{X af + ax}^{\frac{3}{2}}}{3a} + c = \text{BMNG.}$$

Per determinare la costante aggiunta c si rifletta, che nel punto B, quando $x = 0$, lo spazio ricercato è anche uguale zero, adunque nell' integrale fatto $x = 0$ sarà $\frac{2}{3} f \sqrt{af} + c = 0$, e quindi $c = - \frac{2}{3} f \sqrt{af}$, epperò lo spazio BMNG sarà

$$\overline{\tfrac{2}{3} f + x} \sqrt{af + ax} - \tfrac{2}{3} f \sqrt{af} = \frac{2 \left(af + ax\right)^{\frac{3}{2}}}{3a} - \frac{2}{3} f \sqrt{af}.$$

Sia la curva dell' equazione $y = \sqrt[3]{x + a}$, da quadrarsi; sostituendo il valore di y nella formola ydx, s' avrà $dx \sqrt[3]{x + a}$, ed integrando (§. 231), sarà $\frac{3}{4} \left(x + a\right)^{\frac{4}{3}} + c$ la quadratura ricercata.

Posto $x = 0$, sarà $\frac{3}{4} a \sqrt[3]{a} + c = 0$, e $\frac{3}{4} a \sqrt[3]{a} = - c$; epperò l' integrale compito, ossia la quadratura ricercata della proposta curva sarà

$$\frac{3}{4} \left(x + a\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} a \sqrt[3]{a}$$

FIGURA XCIII. Sia OMN un' iperbola fra gli assintoti AG, AT dell' equazione $c^3 = xy^2$,

supposta l' ascissa AB $= x$, l' ordinata BM $= y$, e si voglia trovare lo spazio ABMOT infinitamente prodotto verso O, T, sarà $y = \sqrt{\frac{c^3}{x}}$, e sostituito questo valore di y nella formola ydx, s' avrà $\sqrt{\frac{c^3}{x}}\, dx = c^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$, e integrando, sarà $2c^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = 2c\sqrt{cx} + b$ (§. 227); ma posto $x = \emptyset$, riesce anche $b = \emptyset$; adunque non è necessario in questo caso aggiugnere costante alcuna, e l' integrale compito sarà $2\sqrt{c^3 x}$ uguale allo spazio AMOTB infinitamente prodotto verso O, T, e sostituendo in vece di $\sqrt{\frac{c^3}{x}}$ il suo uguale y, sarà $2\sqrt{c^3 x} = 2xy$, quantità finita, ed uguale al detto spazio infinitamente prodotto allo insù verso O, T.

Se l' equazione fosse $c^3 = x^2 y$, sarà $y = \frac{c^3}{x^2}$, onde $ydx = \frac{c^3 dx}{x^2}$, e integrando, sarà $-\frac{c^3}{x} + b$: ma posto $x = \emptyset$, sarà $\frac{c^3}{\emptyset} = \omega$, adunque b sarà anche quantità infinita da aggiugnersi per avere

l'integrale compito; e però in questo caso lo spazio ABMOT sarà infinito.

245. Negli addotti esempi le formole differenziali sono integrabili algebraicamente; per adurne ora di quelle, che sono integrabili trascendentalmente, sia OMN l'iperbola appoloniana fra gli assintoti dell'equazione $a^2 = xy$, è si voglia trovare la superficie A B O M T terminata a una distanza infinita dal punto A verso T, ove quest'iperbola incontra l'assintoto A T, sarà $y = \frac{a^2}{x}$, e sostituendo questo valore nella formola ydx, s'avrà $\frac{a^2dx}{x}$, e integrando, avremo $a\, l.\, x + l.\, c =$ ABMOT, preso esso logaritmo nella logaritmica della sottotangente $= a$ (§. 233); ma posto $x = 0$, il logaritmo di zero sarà quantità infinita, e negativa; adunque il logaritmo della quantità c da aggiungersi all'integrale dee essere quantità infinita, e positiva, e però sarà infinito lo spazio ABMOT.

Se si vorrà trovare lo spazio BMGN, presa l'origine delle ascisse dal punto B, e fatto $AB = b$, $BG = x$, $GN = y$, sarà

$by + xy = a^2$ l' equazione dell' istessa iperbola appoloniana, onde $y = \frac{a^2}{b+x}$, e $ydx = \frac{a^2 dx}{b+x}$, e integrando, sarà

$S\,ydx = a\,l.\overline{b+x} + l.\,c$, preso esso logaritmo nella logaritmica della sottotangente $= a$. Per determinare la costante aggiunta $l.\,c$, si porrà $x = 0$, e sarà $a\,l.\,b + l.\,c = 0$, e quindi $l.\,c = -a\,l.\,b$, adunque l' integrale compito sarà $a\,l.\overline{b+x} - a\,l.\,b =$ BGNM.

Finalmente, se si prenderà BG $= x$ infinito, riuscirà infinito $l.\overline{b+x}$, adunque BMGN infinitamente prodotto dalla banda di G riuscirà anche infinito.

246. Negli esempj seguenti si vede la necessità di usare le serie infinite, affine di avere la quadratura ricercata. Debbasi quadrare la superficie AMNCP, che è la quarta parte del cerchio euclideo AMNBO, fatto il raggio AC $= a$ $=$ CM, l' ascissa CP $= x$, la di cui origine è nel centro C, l' ordinata PM $= y$, sarà $y^2 = a^2 - x^2$, e $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, sostituito pertanto questo valore nella formola per le quadrature, sarà

FIGURA XCIV.

$ydx = dx\sqrt{a^2 - x^2}$, e riducendo il radicale in serie infinita (§. 241), sarà

$$dx\sqrt{a^2 - x^2} = adx - \frac{x^2dx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5} - \frac{5x^8dx}{128a^7}$$ ec., e integrando, sarà

$$ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$$ ec.,

e fatto $x = a$, l' integrale suddetto diventerà $a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112} - \frac{5a^2}{1152}$ ec., valore approssimato d' esso quadrante AMNC, onde il quadruplo della ritrovata serie, cioè $4a^2 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{a^2}{10} - \frac{a^2}{28} - \frac{5a^2}{288}$ ec. darà l' area di tutto il circolo ANBO.

Se si vorrà trovare solamente l' area di APM, che è la metà della porzione MAQ del cerchio. Si prenda in A l' origine delle ascisse, e fatto AP $= x$, PM $= y$, il diametro AB $= m$, sarà $y^2 = mx - x^2$ l' equazione dell' istesso cerchio, onde $y = \sqrt{mx - x^2}$; e però sarà $ydx = dx\sqrt{mx - x^2}$, e convertito in serie infinita il radicale, sarà

$$dx\sqrt{mx - x^2} = m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2m^{\frac{1}{2}}}$$

$- \dfrac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8m^{\frac{3}{2}}}$ ec., e integrando, sarà

$$AMP = \frac{2}{3} m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5m^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28m^{\frac{3}{2}}} \text{ ec.}$$

Finalmente, se si vorrà avere l'area PMNC, basterà trovare separatamente l'area del quadrante ANC, e quella della semiporzione AMP, e sottratta questa da quella, l'avanzo somministrerà la quadratura approssimata della semizona PMNC.

Nell'istessa maniera si opererà per trovare la quadratura approssimata dell' elisse, delle sue parti, e di altre curve, le di cui aree non si possono altrimenti avere se non col mezzo delle serie infinite.

247. Si dee quì avvertire, che se della curva, di cui si vuol trovare l'area, l'equazione fosse riferita a direttrici ob-

bliquangole, o pure che le ordinate fossero riferite al foco, o polo della curva, converrebbe servirsi di un' altra formola diversa dalla ydx. Per non allontanarsi dal nostro oggetto, noi tralascieremo d'inoltrarsi in queste particolarità, e tralascieremo pure di far vedere come per mezzo del calcolo integrale l' equazione di una curva colle ordinate riferite al foco si possa convertire in una equazione colle ordinate rettangole riferite all' asse, e viceversa, bastando al nostro intento le cose già insegnate intorno la maniera di trovare l' equazione di una curva; per la qual cosa supporremo sempre in avvenire, che le equazioni delle curve siano riferite all' asse, salvo che si avvisi altrimenti.

248. *Si rettifica una curva, allorchè si assegna una linea retta uguale alla proposta curva.*

E' stato dimostrato (§. 184), che l' arco elementare di una linea curva si esprime per $\sqrt{dx^2+dy^2}$: quest' espressione serve di formola per rettificare le curve. A tal fine si differenzia l' equazione della curva proposta, indi si sostituisce il valore di dx dato per dy, e per le costanti dell' equazione, o viceversa, come

più tornerà a conto, e si ottiene una espressione, la quale integrata somministra una linea retta uguale alla curva proposta. Queste integrazioni si trovano o algebraicamente, o trascendentalmente, o per via di serie infinite, secondo, che esige la natura dell' espressione differenziale, che si vuol integrare.

Noi abbiamo di già veduto (§. 222), che tutte le curve nate da una sviluppata algebraica sono tutte rettificabili. Nei seguenti esempi si vedrà, come le curve in generale si possino rettificare, o precisamente, o per approssimazione.

249. Debbasi rettificare la parabola cubica A O M dell' equazione $px^2 = y^3$, essendo $AB = x$, $BM = y$; differenziando, sarà $2pxdx = 3y^2dy$, e $dx = \frac{3y^2dy}{2px}$, FIGURA XCV. onde $dx^2 = \frac{9y^4dy^2}{4p^2x^2}$, e scrivendo y^3 in vece di px^2, sarà $\frac{9y^4dy^2}{4py^3} = \frac{9ydy^2}{4p}$, e sostituendo questo valore di dx^2 nella formola $\sqrt{dx^2+dy^2}$, sarà $\sqrt{\frac{9ydy^2}{4p} + dy^2}$

$= dy \sqrt{\frac{9y + 4p}{4p}}$, il di cui integrale è

$\frac{8p \times \overline{9y+4p}^{\frac{3}{2}}}{27 \times \overline{4p}^{\frac{3}{2}}} + c$, in cui posto $y = 0$, riesce $\frac{8p}{27} + c = 0$, e $c = -\frac{8p}{27}$; adunque l'integrale compito sarà $\frac{8p \times \overline{9y+4p}^{\frac{3}{2}}}{27 \times \overline{4p}^{\frac{3}{2}}} - \frac{8p}{27}$, lunghezza precisa dell' arco AOM.

Se la curva AOM sarà la parabola appolloniana dell' equazione $ax = y^2$, differenziando, s'avrà $adx = 2ydy$, e quadrando, sarà $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$, e sostituendo il valore di dx^2, sarà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{4y^2dy^2}{a^2} + dy^2}$ $= \frac{dy}{a} \sqrt{4y^2 + a^2}$. Per integrare quest' espressione, suppongasi $\sqrt{4y^2 + a^2} = 2y + z$, affine di levare il radicale, e sostituendo indi i valori di $2y$, dy ricavati dalla fatta supposizione, si avrà

$$\frac{dy}{a}\sqrt{4y^2+a^2} = -\frac{a^3dz}{8z^3} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a},$$

nella qual espressione si scorge, che il primo, e terzo termine sono integrabili algebraicamente, ma il termine di mezzo $\frac{adz}{4z}$ è un integrale trascendentale, essendo necessario di usare per esso i logaritmi; epperò la rettificazione della parabola appoloniana si ha solamente per approssimazione, poichè dipende dalla logaritmica.

Una consimile approssimazione s'ottiene, allorchè si cerca la rettificazione della parabola appoloniana per mezzo delle serie; imperciocchè, ridotta in serie l' espressione $\frac{dy}{a}\sqrt{4y^2+a^2}$, si ha $dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6}$ ec., e integrando, s'ottiene $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}$ ec. pel valore approssimato dell' arco AOM.

Debbasi rettificare la circonferenza del cerchio euclideo CFKGL, di cui sia il raggio $CH = a = HF$, l' ascissa $HP = x$, di cui l' origine sia nel centro H, FIGURA XCVI.

l' ordinata $FP = y$, sarà $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e $dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}$, e sostituito questo valore nella formola per rettificare un arco, sarà

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, e riducendo questa espressione in serie, sarà

$dx + \frac{x^2 dx}{2a^2} + \frac{3x^4 dx}{8a^4} + \frac{5x^6 dx}{16a^6}$ ec., ed integrando, s' avrà l' arco $KF = x + \frac{x^3}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6}$ ec., e supposto $x = a$, sarà l' arco $CFK = a + \frac{a}{6} + \frac{3a}{40} + \frac{5a}{112}$ ec. uguale alla quarta parte della circonferenza del cerchio, e moltiplicando per 4, s'avrà $4a + \frac{2}{3}a + \frac{3}{10}a + \frac{5}{28}a$ ec. per l' intera circonferenza approssimata del cerchio.

Nell' istessa maniera si procederà per rettificare l' elisse, ed altre curve.

250. Le superficie concave, e le convesse si dicono *Compianate*, allorchè si assegna una superficie piana rettilinea

uguale alle medesime, e si dice, che si cuba un solido, allorchè del medesimo si assegna la solidità.

Per divenire a queste operazioni convien prima instituire le convenienti formole generali, come si è fatto per quadrare, e per rettificare le curve.

251. S' arruoti il piano mistilineo A M C B intorno l' asse AB, la curva AMC descriverà una superficie convessa, mentre, che il piano A M C B descriverà un solido; ma la prima flussione M C della curva descriverà una zona infinitesima, che sarà l' elemento della superficie convessa descritta dalla curva, e il piano infinitesimo PMCB descriverà un solido pure infinitesimo, che sarà l' elemento del solido prodotto dal piano A M C B. Dal punto M si tiri M R paralella alla AB, e si chiami AP $= x$, PM $= y$, sarà PB $=$ MR $= dx$, CR $= dy$, ed MC $= \sqrt{dx^2+dy^2}$, e sia $r : c$ la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, sarà $\frac{cy}{r}$ la circonferenza del cerchio descritto col raggio $y =$ P M, e moltiplicata questa circonferenza per

FIGURA XCVII

MC, s' avrà $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ per l'espressione della zona infinitesima, che serve di formola generale per le superficie convesse, e concave prodotte nella descritta maniera.

252. Per costruire la formola generale per cubare i solidi, si rifletta, che l'area del circolo, che ha il raggio PM, sarà $\frac{cy^2}{2r}$; e però $\frac{cy^2dx}{2r}$ sarà la solidità del cilindro infinitesimo descritto dal rettangolo PMRB; ma esso non differisce dal solido generato, se non se per una quantità infinitesima del secondo ordine, adunque questi due solidi elementari saranno uguali, e l'espressione $\frac{cy^2dx}{2r}$ sarà l' elemento del solido generato dalla rivoluzione del piano APM intorno all'asse AP, e servirà essa espressione di formola generale per cubare i solidi generati nella descritta maniera.

253. Volendo far uso delle formole (251, e 252), abbiasi l'emisfero CAK, del quale si debba compianare la superficie convessa, e supposto che il quadrante CAB siasi aggirato attorno al

raggio AB, e sia AB $= a$, l' ascissa AP $= x$, la corrispondente ordinata PM $= y$, sarà $y = \sqrt{2ax - x^2}$ l' equazione di questo cerchio, e però differenziando, e quadrando il differenziale, sarà

FIGURA XCVIII.

$dy^2 = \frac{\overline{a - x}^2 \times dx^2}{2ax - x^2}$. Presa pertanto la formola $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ per le combinazioni, e sostituiti in essa i valori di y, dy^2, s'avrà $\frac{c}{r} \sqrt{2ax - x^2} \times \sqrt{dx^2 + \frac{\overline{a-x}^2 \times dx^2}{2ax - x^2}}$ $= \frac{cadx}{r}$, e integrando, sarà $\frac{cax}{r}$ valore della superficie convessa del segamento di sfera MAE.

Se poi si farà $x = a$, s' avrà $\frac{ca^2}{r}$ uguale alla superficie convessa dell' emisfero CAK, e però $\frac{2a^2c}{r}$ sarà la superficie convessa di tutta la sfera, perchè l' area del cerchio generatore $= \frac{ca^2}{2r}$, così starà la superficie della sfera al gran cerchio di questa, come 4 : 1, cioè quadrupla del cerchio massimo.

Se si vorrà avere la superficie convessa della zona CMEK, basterà dalla superficie dell' emisfero CAK sottrarre quella della porzione di sfera MAE, e si otterrà nell' avanzo quanto si cerca.

254. Per cubare l' emisfero, ritenendo il canone del §. 253, si prenderà la formola $\frac{cy^2 dx}{2r}$ (§. 252), e sostituito in essa in vece di y^2 il suo uguale $2ax - x^2$ dato dall' equazione al cerchio, sarà $\frac{cdx}{2r} \times \overline{2ax - x^2}$, e integrando, sarà $\frac{3cax^2 - cx^3}{6r}$ valore della solidità del segamento di sfera MAE. Se poi si supporrà $x = a$, sarà $\frac{3ca^3 - ca^3}{6r} = \frac{ca^3}{3r}$ la solidità dell' emisfero CAK, ed il doppio $\frac{2ca^3}{3r}$, sarà la solidità di tutta la sfera.

Siccome $\frac{ca^3}{r}$ esprime la solidità del cilindro dell' altezza $= 2a$ uguale al diametro della sua base, sarà il cilindro circoscritto alla sfera inscritta, come $\frac{ca^3}{r} : \frac{2ca^3}{3r} = 3 : 2$. La solidità del cono,

la cui altezza sia uguale al raggio di sua base $= a$, sarà $\frac{ca^3}{6r}$, adunque sarà l'emisfero al cono inscritto, come $\frac{ca^3}{3r} : \frac{ca^3}{6r} = 2 : 1$. In simil modo si potranno dimostrare molti altri teoremi.

Per avere la solidità di un settore MAEB, converrà alla porzione di sfera MAE $= \frac{3acx^2 - cx^3}{6r}$ aggiugnere la solidità del cono MEB $= \frac{c}{6r} \times \overline{2ax - x^2} \times \overline{a - x}$, la somma $\frac{ca^2x}{3r}$ sarà la solidità ricercata d'esso settore.

255. Abbiasi un paraboloide formato dall' arruotamento della parabola appoloniana AMO intorno al suo asse AB, e sia AP $= x$, PM $= y$, ed $ax = y^2$ l' equazione di questa parabola, e si debba compianare la superficie convessa di questo solido, si differenzi, e si quadri l' equazione $ax = y^2$, s' avrà $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$, e sostituendo questo valore nella formola per le compianazioni

FIGURA XCIX.

$\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2+dy^2}$ (§. 251), s' avrà $\frac{cydy}{ar} \sqrt{4y^2+a^2}$, e integrando, sarà $\frac{c}{12ar} \times \overline{4y^2+a^2}^{\frac{3}{2}}$ valore della superficie convessa del paraboloide OAQ.

Se poi si volesse la superficie convessa della zona MOQN, basterà dalla superficie di tutto il paraboloide AQO sottrarre quella del paraboloide ANM, l' avanzo somministrerà quanto si cerca.

Per cubare il proposto paraboloide, basterà nella formola generale delle cubature $\frac{cy^2dx}{2r}$ (§. 252) sostituire il valore di y^2 dato dall'equazione $ax=y^2$, e si avrà $\frac{cy^2dx}{2r} = \frac{caxdx}{2r}$, e integrando, sarà $\frac{cax^2}{4r}$ valore della solidità d' esso conoide.

Se la curva AMO fosse un elisse, di cui AB$=a$ semiasse maggiore, BO$=b$ semiasse minore, AP $=x$, PM$=y$, sarà la sua equazione $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2ax-x^2}$, e sostituito il valore di y^2 nella formola

$\frac{cy^2dx}{2r}$, s'avrà $\frac{cb^2}{2a^2r}\int\overline{2axdx - x^2dx}$, il di cui integrale $\frac{cb^2}{2a^2r}\int\overline{ax^2 - \frac{x^3}{3}}$ somministra la cubatura del solido generato dalla rivoluzione della porzione d' elisse AMP. Se poi si farà $x = a$, sarà $\frac{cb^2a}{3r}$ la solidità del semisferoide.

Ragionando poi come nell' antecedente paragrafo, si potranno dedurre altri teoremi intorno il cilindro, ed il cono circoscritto, ed inscritto nello sferoide.

256. Si dee quì avvertire;

1.° Che le compianazioni, e le cubature ritrovate, siccome suppongono la rettificazione, e la quadratura del cerchio, così somministrano soltanto delle approssimazioni, poichè tali sono anche la circonferenza, e la superficie del cerchio (§. 246, e 249).

2.° Che, qualunque volta si dee cubare un solido, fa di mestieri considerare di quali elementi egli sia composto, giusta le differenti sezioni, che in esso fare si possono, tornando in acconcio ora l' una, ed ora l' altra sezione

secondo le circostanze, e indi fra i suddetti elementi scegliere quelli, che con maggior facilità possono maneggiarsi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s' adatta. Per esempio, nel cono si possono prendere per elementi i cerchi paralelli alla base, o le sezioni paralelle ad un lato, o le sezioni paralelle all' asse ec.

Questa riflessione è di gran importanza per trovare la cubatura di que' solidi, che non sono generati dall' arruotamento di una curva intorno il suo asse. Per darne un qualche riscontro, abbiasi il cilindro Q B M C P T, da cui con un piano, che passa per B C diametro di una base, e nella direzione A P, si taglia la porzione, o sia l' unghia CBMP, e si cerchi la solidità di quest' unghia.

FIGURA C.

Al diametro B C si tiri rettangolo l' altro Q M, e si chiami $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, $DH = y$ rettangola col diametro B C, sarà $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ l' equazione del cerchio BMCQ. Dal punto H si tiri H O paralella alla MP, cadrà H O tutta sulla superficie del cilindro, e finalmente si tiri DO, questa

giacerà tutta nel piano BCPO, col qual mezzo si verrà a formare nella solidità dell' unghia proposta il triangolo DHO simile al triangolo APM, e quindi sarà AM : MP = DH : HO, o sia $a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = HO$; ma la somma di tutti questi triangoli DHO, ne' quali si suppone una spessezza infinitamente picciola dx, forma la ricercata solidità della mezza unghia, o sia la somma di tutti gli elementi espressi per $DHO \times dx = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} \times \sqrt{a^2 - x^2} \times dx$; e però, se s' integrerà quest' espressione, s' avrà $\frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$ per la cubatura del solido PADHMO, e fatto $x = a$, sarà $\frac{a^2 b}{3}$ la cubatura di PABHM metà dell' unghia, e $\frac{2a^2 b}{3}$ sarà la solidità di tutta l' unghia CBMP.

257. Per risolvere i problemi di questa specie in una maniera più generale, sia il mezzo cilindro DACHEG, il quale sia segato da un piano, che passa per la retta CD, e pel punto E nella di-

FIGURA CI.

rezione BE, onde nasca l' unghia DAEC, di cui si vuole la solidità. Si chiami BA $= a$ perpendicolare alla DC, AE $= b$, BQ $= x$, QM ordinata rettangola $= y$, facendo il rettangolo PQMNO paralello all' altro DHCG, sarà QK perpendicolare alla AB $= \frac{bx}{a}$, e però $\frac{2bxy}{a}$ sarà la superficie del rettangolo PONM, e questo, essendo moltiplicato per dx, somministrerà $\frac{2byxdx}{a}$ per l' elemento della solidità dell' unghia DAEC.

Per avere questa solidità, sia DAC una curva qualsivoglia, e per esempio una parabola dell' equazione $y^2 = a - x$, sostituendo il valore di y nella formola ritrovata, s' avrà $\frac{2byxdx}{a} = \frac{2bxdx}{a} \times \overline{a-x}^{\frac{1}{2}}$, la quale, essendo integrata a tenore del §. 231, aggiunta la costante, e fatto $x = a$, darà la solidità di tutta l' unghia $= \frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$, e supposto, che quando $x = 0$, come succede nel punto B, sia

l'ordinata BC $= y = c$, sarà $a^{\frac{1}{2}} = c$, e però la solidità dell' unghia sarà $\frac{8abc}{15}$

Nello stesso modo si troverà, che la solidità di un' unghia ricavata da un cilindro elittico si esprime per $\frac{2abc}{3}$, allorchè il semiasse trasverso AB $= a$, ed il semiconiugato BC $= c$, e così di altri.

258. Finalmente, volendo trovare il logaritmo di un numero proposto, se questo numero sarà maggiore dell' unità, si chiami il suo eccesso $= y$, e sarà $1 + y$ il proposto numero, e quindi il suo logaritmo sarà

$$l.\ \overline{1+y} = S\,\frac{1 \times dy}{1+y}\ (\S.\ 233).$$

Si converta in serie la frazione $\frac{1}{1+y}$, e si moltiplichi ciascun termine per dy, s'avrà $dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ ec., e integrando, s'avrà

$$y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \text{ ec.}$$

(§. 241) pel valore del logaritmo ricercato del numero proposto $1 + y$.

Occorrendo poi, che il numero proposto sia minore dell'unità, si chiami $= z$ l'eccesso dell'unità verso questo numero, sarà $1 - z$ il numero proposto, il cui logaritmo sarà

$l.\ \overline{1 - z} = S\,\frac{-1 \times dz}{1 - z}$, e riducendo in serie la frazione $\frac{-1}{1-z}$, e moltiplicando per dz, s'avrà

$-dz - zdz - z^2dz - z^3dz$ ec., il di cui integrale $-z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ ec. somministrerà il logaritmo ricercato pel proposto numero $1 - z$.

CAPO III.

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

259. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* la maniera di trovare la curva, di cui è cognita la tangente, o la sottotangente, la normale, o qualunque altra linea, o pure è data la di lei rettificazione, o la superficie ec.

Per ritrovare la ricercata curva, convien paragonare l'espressione data della tangente, o della rettificazione ec. colla corrispontente formola generale.
Da tale confronto nasce un' equazione differenziale, la quale, essendo poi integrata, somministra l'equazione della curva ricercata.

Tale operazione si dice *Costruire le equazioni differenziali* le cui flussioni possono essere del 1.°, 2.°, 3.° ordine ec.

Le equazioni, che nascono dal confronto della data espressione della tangente, della normale ec. colla formola differenziale, contengono almeno due variabili, e sì queste, come le loro flussioni possono essere separate, o miste fra esse. Da quì avviene, che per ottenere le necessarie integrazioni, quando le variabili sono miste, esigonsi ripieghi diversi da quelli fin'ora spiegati, e questi ripieghi sono sempre metodi particolari, coi quali, sebbene s' ottenga l' intento in molte operazioni, moltissime altre formole s' incontrano poi, le quali sono affatto contumaci. Noi tratteremo solamente del modo di costruire le equazioni differenziali, che contengono flussioni del primo ordine.

260. Per incominciare dalla costruzione delle equazioni differenziali, in cui le variabili, e le loro flussioni si trovano separate, daremo la soluzione di alcuni problemi.

Data la sottotangente di una curva, trovare l' equazione dell' istessa curva. Sia $\frac{2y^2}{a}$ la data sottotangente; poichè la formola generale per essa è $\frac{ydx}{dy}$ (§. 181), confrontando questa colla data sottotangente, sarà $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$, e quindi $adx = 2ydy$, equazione differenziale, la quale, essendo integrata, somministra $ax = y^2$ per l' equazione ricercata della curva.

Se la sottotangente fosse $= \frac{y^2}{a - x}$, sarà $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{a - x}$, e $adx - xdx = ydy$ equazione differenziale, la quale, essendo integrata, dà $ax - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$, o sia $2ax - x^2 = y^2$ equazione della ricercata curva.

Se la sottotangente fosse $= \frac{y^2}{a+x}$, operando come avanti, si troverà $2ax + x^2 = y^2$ per l' equazione ricercata.

Se la sottotangente sarà uguale all'ordinata, avremo $y = \frac{ydx}{dy}$, onde $dy = dx$, e integrando, sarà $y = x$, equazione, che appartiene al triangolo isoscele, considerando che x sia una retta, ma se x sarà un arco di cerchio, l' equazione apparterrà alla cicloide ordinaria.

Se la sottotangente sarà una linea costante $= c$, avremo $c = \frac{ydx}{dy}$, e $\frac{cdy}{y} = dx$, e integrando, sarà $l.\ y = x$, equazione alla logaritmica della sottotangente $= c$.

261. Cognita la sottonormale di una curva trovare l' equazione alla curva.

Sia $\frac{a^2}{3y}$ la sottonormale cognita, poichè la formola generale per questa linea è $\frac{ydy}{dx}$ (§. 184), sarà $\frac{a^2}{3y} = \frac{ydy}{dx}$, e $a^2dx = 3y^2dy$, equazione differenziale, la quale, essendo integrata, somministra $a^2x = y^3$ per l' equazione della ricercata curva.

Se la sottonormale data fosse $= \frac{c^2 - 3x^2}{3y}$, confrontando quest' espressione colla formola, avremo $\frac{ydy}{dx} = \frac{c^2 - 3x^2}{3y}$, e facendo sparire i rotti, sarà $3y^2dy = c^2dx - 3x^2dx$, e integrando, s' avrà $y^3 = c^2x - x^3$, equazione alla curva.

Se la sottonormale data fosse $= \sqrt{ax}$, confrontando, sarà $\frac{ydy}{dx} = \sqrt{ax}$, e $ydy = dx\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, ed integrando, avremo $\frac{y^2}{2} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, o sia $y^2 = \frac{4}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{ax}$; equazione della ricercata curva.

Se la data sottonormale fosse $= \frac{3ax^2 - 2x^3}{2 \times \overline{a-x}^2}$, sarà $\frac{ydy}{dx} = \frac{3ax^2 - 2x^3}{2 \times \overline{a-x}^2}$, e $2ydy = \frac{\overline{3ax^2 - 2x^3} \times dx}{\overline{a-x}^2}$, integrando, ed aggiungendo la costante, sarà $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$,

equazione ricercata, che appartiene alla Cissoide di Diocle.

262. Data la superficie di una curva trovare l'equazione alla curva istessa.

Sia $c\sqrt{x}$ la superficie data, in cui x esprima l'ascissa. Prendasi il differenziale di questa superficie, e sarà $\frac{1}{2}cx^{-\frac{1}{2}}dx$, e perchè la formola generale per le superficie si è ydx (§. 243), così avremo $ydx = \frac{1}{2}cx^{-\frac{1}{2}}dx$, e dividendo per dx, sarà $y = \frac{1}{2}cx^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{2\sqrt{x}}$, e quadrando ambedue i membri, e trasportando, sarà $y^2x = \frac{c^2}{4}$ l'equazione ricercata, che, come facilmente si scorge, appartiene all'iperbola del terzo grado fra gli assintoti.

Se la superficie della curva fosse $= \frac{x^3}{a}$, preso il differenziale di questa superficie, sarà $\frac{3x^2dx}{a}$; s'avrà pertanto $ydx = \frac{3x^2dx}{a}$ per l'equazione differenziale, la quale, essendo divisa per dx,

e moltiplicata per a, darà $\frac{ay}{3}=x^2$, equazione ricercata.

Se la superficie della curva fosse $c\sqrt{c^2+x^2}$, trovato il suo differenziale $\frac{cxdx}{\sqrt{c^2+x^2}}$, sarà $ydx=\frac{cxdx}{\sqrt{c^2+x^2}}$, e fatta la divisione per dx, s' avrà

$$y=\frac{cx}{\sqrt{c^2+x^2}},$$ equazione ricercata.

Se la superficie della curva fosse $=x\sqrt{a^2+x^2}$, trovato il suo differenziale $dx\sqrt{a^2+x^2}+\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, s' avrà

$ydx=dx\sqrt{a^2+x^2}+\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, e dividendo per dx, sarà $y=\sqrt{a^2+x^2}$ $+\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$ l'equazione ricercata.

263. Trovare l' equazione della curva, di cui sia cognita la perpendicolare.

Sia la perpendicolare cognita $= c$, poichè la formola generale per questa linea è $y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ (§. 184), sarà

$c = y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, e $cdx = y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e

quadrando, sarà $c^2 dx^2 = y^2 dx^2 + y^2 dy^2$, e trasportando, s' avrà $\overline{c^2 - y^2} \times dx^2 = y^2 dy^2$, ed estratta la radice quadrata, e fatta la divisione per $\sqrt{c^2 - y^2}$, sarà $dx = \frac{ydy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$ o sia $\frac{-ydy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -dx$, e integrando, sarà $\sqrt{c^2 - y^2} + a = -x$.

Per conoscere se quest' integrale è compito, supponghasi $y = 0$, sarà $\sqrt{c^2} + a = 0$, ed $a = -c$, avremo pertanto $\sqrt{c^2 - y^2} - c = -x$, e $\sqrt{c^2 - y^2} = c - x$, e quadrando, e correggendo l' espressione, sarà $2cx - x^2 = y^2$ equazione ricercata.

Se la perpendicolare cognita sia $= \sqrt{y^2 + a^2}$, sarà $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{y^2 + a^2}$,

e $y \sqrt{dx^2+dy^2} = dx \sqrt{y^2+a^2}$, e quadrando, sarà $y^2dx^2 + y^2dy^2 = y^2dx^2 + a^2dx^2$, o sia $y^2dy^2 = a^2dx^2$, ed estratta la radice quadrata, sarà $ydy = adx$, e integrando, avremo $\frac{y^2}{2} = ax$, e $y^2 = 2ax$, equazione ricercata.

Mediante le ritrovate equazioni sarà poi facile di costruire la corrispondente curva, e di trovare le altre sue proprietà col mezzo delle già spiegate regole.

264. Passando ora alla costruzione delle equazioni differenziali, nelle quali e variabili si trovano fra esse confuse, e miste (§. 259), due casi possono occorrere nelle equazioni, che contengono flussioni del primo ordine.

Si ha il primo caso, quando si può divenire alle integrazioni senz'alcuna previa separazione delle variabili, e delle loro flussioni.

Ha luogo il secondo caso, allorchè è necessario di separare prima le variabili, e così rendere le equazioni atte ad essere integrate.

265. Per cominciare dal primo caso si riflette, che le formole più semplici,

le quali hanno le due vatiabili insieme confuse, sono le due seguenti, 1.ª $xdy + ydx$, 2.ª $\frac{ydx - xdy}{y^2}$. L' integrale della prima è xy, e della seconda $\frac{x}{y}$. A queste due formole adunque convien procurare di ridurre le altre più composte, e ciò coi soliti ripieghi dell' Algebra ordinaria, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che far possono al proposito.

Per far pratica di questa regola, addurremo alcuni esempi, supponendo in essi, che avendo di già fatto il confronto della data espressione della tangente, o sottotangente, o rettificazione, o altra espressione colla corrispondente formola generale, siasi ottenuta l' equazione differenziale.

Debbasi costruire l' equazione differenziale $ydx = xdx - xdy$, se in questa si trasporterà dall' altra parte l' ultimo termine, s' avrà $ydx + xdy = xdx$, il di cui integrale sarà $xy = \frac{x^2}{2} + c$ costante

da aggiungersi, e da determinarsi poi nei casi particolari.

Sia l'equazione differenziale da costruirsi $x^4dy^2 + 2x^3ydxdy = a^4dx^2 - x^2y^2dx^2$, se si trasporterà l'ultimo termine nel primo membro, e si dividerà tutta l'equazione per x^2, s'avrà $x^2dy^2 + 2xydxdy + y^2dx^2 = \frac{a^4dx^2}{x^2}$, da cui estratta la radice quadrata, sarà $xdy + ydx = \frac{a^2dx}{x}$, e integrando, avremo $xy = a\, l.\, x$, da prendersi esso logaritmo nella logaritmica della sottotangente $= a$.

Sia l'equazione $ydx = y^3dy + y^2dy + xdy$ da costruirsi. Si trasporti l'ultimo termine nel primo membro, e sarà $ydx - xdy = y^3dy + y^2dy$. In questa equazione si osserva, che se il primo membro verrà diviso per y^2, esso sarà integrabile. Dividendo pertanto tutta l'equazione per y^2, sarà $\frac{ydx - xdy}{y^2} = ydy + dy$, e integrando, s'avrà $\frac{x}{y} = \frac{y^2}{2} + y + c$ costante arbitraria da determinarsi poi, come è stato detto.

266. Per costruire le equazioni differenziali nel secondo caso (§. 264), cioè quando è necessario di separare prima le variabili per rendere l' equazione atta ad essere integrata, si fa osservare, che pochissime sono quelle equazioni, nelle quali si possano separare le variabili colle sole operazioni dell' algebra ordinaria, come si fa nel primo caso (§. 265). L' equazione $x^2dx^2 + xydxdy = a^2dy^2$ è una di quelle, in cui si possono separare le variabili colle sole operazioni dell' Algebra: imperciocchè il primo membro è una formola di quadratica affetta, che diventerà quadrato perfetto, se si aggiugnerà $\frac{y^2dy^2}{4}$, che è il quadrato fatto dalla metà del coefficiente. Aggiunto pertanto $\frac{y^2dy^2}{4}$ in ciascun membro della proposta equazione, s' avrà $x^2dx^2 + xydxdy + \frac{y^2dy^2}{4} = a^2dy^2 + \frac{y^2dy^2}{4}$, ed estratta da ambe le parti la radice quadrata, sarà

$xdx + \frac{ydy}{2} = dy\sqrt{\frac{y^2}{4} + a^2}$, in cui, trovan-

dosi separate le variabili, si troverà l'integrale a tenore delle date regole, cioè $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=S dy\sqrt{\frac{a^2+y^2}{4}}=ay+\frac{y^3}{24a}-\frac{y^5}{640a^3}$ $+\frac{y^7}{7168a^5}$ — ec. Dal che si scorge, che essendo algebraico l'integrale del primo membro, quello del secondo è solamente approssimato, poichè dipende dalla quadratura dell'iperbola.

267. Il più delle volte convien servirsi delle sostituzioni, il qual ripiego, sebbene sia di un grande uso, non è però universale. Sia l'equazione $a^2dx = x^2dy + 2xydy + y^2dy$ da costruirsi. Suppongasi $x+y=z$, sarà $dx+dy=dz$, $dx=dz-dy$, ed $x^2+2xy+y^2=z^2$, fatte adunque le sostituzioni, sarà $a^2dz - a^2dy = z^2dy$, ed $a^2dz = z^2dy + a^2dy$, e quindi $\frac{a^2dz}{z^2+a^2}=dy$, equazione, in cui sono separate le variabili da integrarsi secondo le date regole.

Debbasi costruire l'equazione differenziale $\overline{xdy+ydx}\sqrt{a^4-x^2y^2} = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Si rifletta, che nel primo

membro l'integrale di $xdy + ydx$ si è xy, e che il quadrato di quest'integrale si trova precisamente nella quantità $\sqrt{a^4 - x^2y^2}$. Adunque, se si supporrà $xy = z$ nel primo membro, s'avranno separate le variabili, e sarà il medesimo $dz \sqrt{a^4 - z^2}$. Riflettasi in oltre, che nel secondo membro l'integrale di $xdx + ydy$ è $\frac{x^2 + y^2}{2}$, e che simili a questo integrale sono le quantità del denominatore, adunque colla sostituzione di $x^2 + y^2 = 2u$ si separeranno le variabili anche nel secondo membro, e l'equazione sarà $dz \sqrt{a^4 - z^2} = \frac{du}{\sqrt{2u}}$, di cui trovando l'integrale colle date regole, s'avrà l'equazione ricercata della curva.

268. Termineremo questo capo col far osservare, che valendosi del metodo addotto (§. 267), l'equazione, che si ricava integrando, appartiene talvolta a una curva di natura diversa, di modo che nel fare piuttosto una sostituzione che un'altra si ricavano equazioni integrali affatto diverse. Tal cosa si potrà però sempre schivare in tutte quelle equazioni differenziali, nelle quali la somma

degli esponenti delle variabili è la stessa per ciascun termine, bastando perciò supporre una delle variabili dell' equazione eguale al prodotto fatto dall' altra in una nuova incognita divisa per una costante qualsivoglia.

Per esempio abbiasi l' equazione differenziale $x^2dy = y^2dx + xydx$, si supponga $y = \frac{xz}{a}$, sarà $dy = \frac{xdz+zdx}{a}$, e fatte le debite sostituzioni nell' equazione, si avrà

$\frac{x^3dz + zx^2dx}{a} = \frac{x^2z^2dx}{a^2} + \frac{zx^2dx}{a}$, e riducendo al comune denominatore a^2, e dividendo per x^2, sarà $axdz = z^2dx$, e $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{z^2}$ equazione, in cui trovandosi separate le incognite, s' integrerà secondo il solito.

Sia l'equazione $x^2dy = y^2dx + x^2dx$, supposto $y = \frac{xz}{c}$, sarà $dy = \frac{xdz+zdx}{c}$, e fatte le sostituzioni, sarà

$\frac{x^3dz + zx^2dx}{c} = \frac{z^2x^2dx}{c^2} + x^2dx$, e riducendo al comune denominatore, e dividendo per x^2, sarà $cxdz = z^2dx + c^2dx$.

$- czdx$; epperò $\frac{dx}{x} = \frac{cdz}{z^2 - cz + c^2}$, e integrando a tenore delle date regole, s'avrà l'equazione della ricercata curva.

CAPO IV.

Del Calcolo delle Quantità logaritmiche ed esponenziali, e dell' uso delle medesime.

269. Il Calcolo delle quantità logaritmiche, di cui trattasi in questo capo, si maneggia alquanto diversamente da ciò, che è stato sin quì detto.

Le espressioni l^2y, l^3y, l^my indicano la seconda, la terza, la potestà m di ly; le espressioni $l^{-2}y$, $l^{-3}y$ $l^{-m}y$ indicano la seconda, la terza, la potestà m negative di ly.

La doppia l indica il logaritmo di logaritmo, e così $ll.\,y$ indica, che del logaritmo di y se ne dee ancora prendere il logaritmo, $mlly = ll.\,y^m$ indica, che del logaritmo di y^m se ne dee ancora prendere il logaritmo.

Per avere la linea, che esprime il logaritmo di logaritmo $ll.y$, sia GHK una logaritmica, in cui sia A il punto d'origine delle ascisse, e sia $CH = y$, sarà $AC = x = l.y$. Coll'intervallo AC si tiri una paralella KL all'assintoto AB, e dal punto K, ove la paralella sega la logaritmica, si tiri l'ordinata KB, sarà essa $KB = l.y$, e quindi sarà $AB = l.l.y$.

FIGURA CII.

Finalmente la caratteristica d prefissa alla quantità logaritmica indica, che di questa si dee prendere il differenziale, e così $dl^m y$ dimostra, che si dee prendere il differenziale della quantità logaritmica $l^m y$. Lo stesso dire si dee di qualsivoglia altra espressione.

270. Cominciando dalle regole per trovare il differenziale di una quantità logaritmica.

Sia proposto da differenziare $l^m y$, pongasi $l^m y = z^m$, sarà $l.y = z$, e $\frac{dy}{y} = dz$ (§. 233), ma il differenziale di z^m è $mz^{m-1}dz$, e $z^{m-1} = l^{m-1}y$, adunque, sostituendo tutti essi valori, s'avrà $mz^{m-1}dz = ml^{m-1}y \times \frac{dy}{y}$, che è il differenziale ricercato, da prendersi il lo-

garitmo nella logaritmica della sottotangente $= 1$, e si prenderebbe nella logaritmica della sottotangenre $= c$, se il differenziale fosse $ml^{m-1}y \times \frac{cdy}{y}$.

Se la quantità da differenziare sarà composta, come $l^m \overline{a+y}$, basterà nella ritrovata espressione differenziale, che serve di formola generale, sostituire $a+y$ in vece di y, onde sarà

$$dl^m \overline{a+y} = ml^{m-1} \overline{a+y} \times \frac{dy}{a+y}.$$

Per differenziare $l^m y^n$, pongasi $y^n = z$, sarà $l^m y^n = l^m z$, ma il differenziale di $l^m z$ è $ml^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$, e $dz = ny^{n-1} dy$, adunque sostituendo tutti essi valori, s'avrà

$$dl^m y^n = mnl^{m-1} y^n \times \frac{dy}{y}.$$

271. Debbasi differenziare la formola $l. l. y$. Si ponga $l. y = z$, sarà $l. l. y = l. z$, e quindi s' avrà $\frac{dy}{y} = dz$ nella logaritmica della sottotangente $= 1$; ma poichè $l. l. y = l. z$, e che il differenziale di lz è $\frac{dz}{z}$ (§. 232), così posti in luogo di dz, e z i valori dati per y, sarà

$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y \times l.y}$ il differenziale della proposta formola.

Debbasi differenziare $l^m ly$, posto $ly = z$, sarà $l^m ly = l^m z$, e $\frac{dy}{y} = dz$; ma il differenziale di $l^m z$ è $ml^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$ (§. 270), adunque, sostituendo in luogo di z, e dz i valori dati per y, sarà $ml^{m-1} ly \times \frac{dy}{yly}$ il differenziale ricercato.

Sia da differenziare $l^n l^m y$. Posto $l^m y = z^m$, sarà $ly = z$, $\frac{dy}{y} = dz$, ed $l^n l^m y = l^n z^m$, ma il differenziale di quest' ultimo è $mnl^{n-1} z^m \times \frac{dz}{z}$, adunque, fatte le sostituzioni, s' avrà $mnl^{n-1} l^m y \times \frac{dy}{yly}$ pel differenziale ricercato.

272. Dall' osservare l'ordine, con cui si sono ottenuti i differenziali logaritmici, si potranno dedurre alcune regole per integrare i differenziali suddetti.

Si dirà adunque in primo luogo, che quelle formole, le quali servono

per integrare le quantità ordinarie differenziali, serviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche ad esse simili, purchè le medesime siano anche divise per la variabile; imperciocchè l' integrale di queste formole sarà lo stesso integrale di quelle, ponendo solo in queste in vece dell' incognita, o sua potestà il logaritmo, o la potestà del logaritmo dell' istessa incognita, il tutto diviso per la sottotangente della logaritmica.

Per esempio, poichè del differenziale $my^{m-1}\,dy$ il suo integrale è y^m, così del differenziale logaritmico $ml^{m-1}y \times \frac{cdy}{y}$ il suo integrale sarà $\frac{cl^m y}{c}$. Nella stessa guisa, poichè del differenziale $z^{-1}\,dz = \frac{dz}{z}$ il suo integrale è lz, così del differenziale logaritmico $l^{-1}z \times \frac{dz}{z} = \frac{dz}{zlz}$ l' integrale sarà $l.\ l.\ z$, supposta la sotto tangente $= 1$. Nella medesima maniera ancora, essendo $\frac{\overline{c^2+y^2}^{\frac{3}{2}}}{3}$ l' inte-

grale di $ydy \sqrt{c^2+y^2}$, così del differenziale logaritmico $ly \sqrt{c^2+l^2y} \times \frac{dy}{y}$ sarà il suo integrale $\frac{\overline{c^2+l^2y}^{\frac{3}{2}}}{3}$, e così di altri.

273. Per vedere in secondo luogo come si possano avere gl' integrali di diverse formole differenziali logaritmiche per mezzo di sostituzioni; sia da integrare la formola $ml^{m-1}\, ly \times \frac{dy}{yly}$. Pongasi $ly = z$, sarà $\frac{dy}{y} = dz$, e sostituendo, s' avrà $ml^{m-1}\, ly \times \frac{dy}{yly} = ml^{m-1}\, z \times \frac{dz}{z}$, e perchè l' integrale di $mz^{m-1}\, dz$ è z^m, così del differenziale logaritmico $ml^{m-1}\, z \times \frac{dz}{z}$ il suo integrale sarà $l^m z$ (§. 272). Pertanto, se si scriverà ly in vece di z, od $l.l.y$ in vece di lz, s' avrà $l^m z = l^m ly$ per l' integrale della proposta formola.

Debbasi integrare il logaritmo differenziale $mnl^{n-1}\, x^m \times \frac{dx}{x}$; suppongasi x^m

$= y$, sarà $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$, e quindi sostituendo, s' avrà $mnl^{n-1}\ x^m \mathrm{X} \frac{dx}{x}$ $= mnl^{n-1}\ y \times \frac{dy}{mx^{m-1} \times x} = nl^{n-1}y \times \frac{dy}{y}$, il di cui integrale è $l^n y$ (§. 272), adunque sostituiti i valori di y dati per x, sarà $l^n y = l^n x^m$ l' integrale ricercato.

Sia da integrare la formola $n\,m\,l^{n-1}\ l^m x \mathrm{X} \frac{dx}{xlx}$; pongasi $lx = y$, sarà $\frac{dx}{x} = dy$, e $l^m x = y^m$, e fatta la sostituzione, s' avrà $mnl^{n-1}\ y^m \mathrm{X} \frac{dy}{y}$, ma l' integrale di questa formola è $l^n y^m$, adunque, sostituito il valore di y dato per x, sarà $l^n l^m x$ l' integrale ricercato della proposta formola.

274. Per integrare la formola $y^m l^n y dy$ si farà uso della seguente serie $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1}$ $- \frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{\overline{m+1}^2} + \frac{n \mathrm{X} \overline{n-1} \times y^{m+1} a^2 l^{n-2} y}{\overline{m+1}^3}$ $- \frac{n \mathrm{X} \overline{n-1}\ \mathrm{X} \overline{n-2} \times y^{m+1} a^3 l^{n-3} y}{\overline{m+1}^4} +$ ec.

e così continuando in infinito colla stessa legge, che da se è manifesta.

Per poco che si consideri l'addotta serie è facile a vedere, che se l'esponente n sarà un numero intero, e positivo, la serie s'interromperà, ed in conseguenza sarà dato in termini finiti l'integrale della proposta formola.

Sia verbigrazia $n = 2$, $m = 1$, onde la formola da integrarsi sia yl^2ydy, sostituendo questi numeri, riuscirà zero il quarto termine, ed ognuno de' susseguenti, onde l'integrale sarà

$$\frac{y^2l^2y}{2} - \frac{2y^2aly}{4} + \frac{2y^2a^2}{8}.$$

275. I ritrovati integrali delle formole differenziali logaritmiche contengono quantità logaritmiche; ma, se si desidera aver gl'integrali d'esse formole per via di serie, che non contengono quantità logaritmiche, si farà come segue.

Sia da integrare $xlx \times dx$. Pongasi $x = z + a$, sostituendo, sarà $\overline{z+a}\, l\, \overline{z+a} \times dz$, ma a tenore del §. 258 $l\, \overline{z+a}$ $= \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4}$ ec. supposta la sottotangente $= 1$, facen-

do adunque l'attuale moltiplica, s'avrà $\overline{z+a}\ l\ \overline{z+a} \times dz = zdz + \frac{z^2dz}{a} - \frac{z^3dz}{2a^2}$ $+ \frac{z^4dz}{3a^3} - \frac{z^5dz}{4a^4} - \frac{z^2dz}{2a} + \frac{z^3dz}{3a^2} - \frac{z^4dz}{4a^3}$ $+ \frac{z^5dz}{5a^4}$ ec.

cioè $zdz + \frac{z^2dz}{2a} - \frac{z^3dz}{6a^2} + \frac{z^4dz}{12a^3} - \frac{z^5dz}{20a^4}$ ec.

e integrando, sara $\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24a^2} + \frac{z^5}{60a^3}$ $- \frac{z^6}{120a^4}$ ec.

$= S\,\overline{z+a}\ l\ \overline{z+a}\,dz$, e sostituendo il valore di $x - a$ in vece di z, s'avrà l'integrale ricercato.

276. Chiamansi quantità esponenziali quelle, che sono elevate a qualunque potestà indeterminata, come sono a^x, y^z ec., gli esponenti delle quali x, z sono quantità indeterminate. Il calcolo, che s'aggira intorno queste quantità, chiamasi *Calcolo esponenziale*.

Le quantità esponenziali si distinguono in gradi, dicendosi del primo grado quelle, i cui esponenti sono indeterminate ordinarie, come sono appunto le quantità a^x, y^z. Del secondo

grado sono quelle altre, i cui esponenti sono pure quantità esponenziali, come sarebbe a^{x^t}, y^{z^p}, intendendo, che x sia elevata alla potestà t, e che z sia elevata alla potestà p. Del terzo grado sono quelle, che hanno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado, come sono $a^{x^{t^n}}$, $y^{z^{p^q}}$, e così di mano in mano collo stesso ordine.

277. Se l' equazione di una curva sia espressa da quantità esponenziali, la curva si chiamerà *Esponenziale* o *Scorrente.*

FIGURA CIII.

Per esempio se nella direttrice AB delle ascisse $= x$ col punto d' origine A si suppone, che le ascisse AC, AD, AB ec. sono in una progressione qualsivoglia, e che ciascheduna corrispondente ordinata CM, DN, BR espressa per y è uguale alla costante c elevata alla potestà x, l' equazione di questa curva esponenziale sarà $c^x = y$.

278. Per differenziare le quantità esponenziali del primo grado, si farà nel seguente modo.

Debbasi differenziare la quantità esponenziale del primo grado z^x. Pongasi $z^x = t$, sarà $lz^x = lt$; ma $lz^x = xlz$, adunque sarà $xlz = lt$, e però differenziando queste espressioni, s' avrà $lz \times dx + \frac{xdz}{z} = \frac{dt}{t}$, e sostituendo z^x in vece di t, e moltiplicando per esso z^x, sarà $dt = z^x lz \times dx + xz^{x-1} \times dz$ il differenziale ricercato.

Per differenziare la quantità esponenziale di secondo grado z^{x^p}, pongasi $z^{x^p} = t$, sarà $x^p lz = lt$, nella qual espressione il differenziale del primo membro sarà composto del differenziale di x^p moltiplicato per lz più il differenziale di lz moltiplicato per x^p; e perchè è già noto il differenziale di x^p, così s' avrà $\overline{x^p dplx + px^{p-1}dx} \times lz + \frac{x^p dz}{z} = \frac{dt}{t}$, e sostituendo z^{x^p} in vece di t, e moltiplicando, sarà $dt = z^{x^p} x^p dplzlx + z^{x^p} px^{p-1} dx\, lz + z^{x^{p-1}} x^p dz$ il differenziale ricercato.

Operando nello stesso modo si troveranno i differenziali delle quantità esponenziali elevate a maggior grado.

279. Per trovare i differenziali delle quantità esponenziali fra esse moltiplicate, per esempio di $x^p y^u$, basterà prendere il differenziale di x^p, e moltiplicarlo per y^u; in oltre si prenderà il differenziale di y^u, e si moltiplicherà per x^p, e sarà

$$y^u \times \overline{x^p lx \times dp + px^{p-1}dx} + x^p \times \overline{y^u ly \times du + uy^{u-1}dy}$$

il differenziale ricercato.

280. Per integrare le formole differenziali, che contengono quantità esponenziali, e per esempio la formola $x^x dx$, suppongasi $x = 1 + y$ (additandosi nell' unità una costante qualsivoglia) sarà $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$. In oltre sia $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$, sarà $\overline{1+y}\, l\, \overline{1+y} = l\, \overline{1+u}$, e però convertite in serie ambedue queste quantità logaritmiche (§. 258), e moltiplicata per $1+y$ la prima serie, si avrà, ridotte le espressioni $y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec.

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \text{ ec.}$$

Si faccia ora un' equazione fittizia, e supponghasi per esempio

$u = y + Ay^2 + By^3 + Cy^4 + Dy^5$ ec. sarà

$u^2 = y^2 + 2Ay^3 + A^2y^4 + 2ABy^5 + 2By^4 + 2Cy^5$ ec.

$u^3 = y^3 + 3Ay^4 + 3A^2y^5 + 3By^5$ ec.

$u^4 = y^4 + 4Ay^5$ ec.

$u^5 = y^5$ ec., sostituendo pertanto i valori di u, u^2, u^3 ec. dati per y, sarà

$$u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} = \left\{\begin{array}{r} y + Ay^2 + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec.} \\ - \frac{y^2}{2} - Ay^3 - \frac{A^2y^4}{2} - ABy^5 \text{ ec.} \\ - By^4 - Cy^5 \text{ ec.} \\ + \frac{y^3}{3} + Ay^4 + A^2y^5 \text{ ec.} \\ + By^5 \text{ ec.} \\ - \frac{y^4}{4} - Ay^5 \text{ ec.} \\ + \frac{y^5}{5} \text{ ec.} \end{array}\right.$$

uguali tutte esse quantità alla seguente

$y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec. e trasportando tutto da una parte, e riducendo l'equazione uguale al zero, sarà

$$\left.\begin{array}{ccccc}
y & +Ay^2 & +By^3 & +Cy^4 & +Dy^5 \\
 & -\frac{y^2}{2} & -Ay^3 & -\frac{A^2y^4}{2} & -ABy^5 \\
 & & & -By^4 & -Cy^5 \\
 & & +\frac{y^3}{3} & +Ay^4 & +A^2y^5 \\
 & & & & +By^5 \\
 & & & -\frac{y^4}{4} & -Ay^5 \\
 & & & & +\frac{y^5}{5} \\
-y & -\frac{y^2}{2} & +\frac{y^3}{6} & -\frac{y^4}{12} & +\frac{y^5}{20}
\end{array}\right\} = 0.$$

Se nell' equazione così ridotta si supporranno uguali al zero i primi, secondi, terzi termini ec., si troveranno facilmente i valori delle majuscole A, B, C, D ec., cioè facendo il secondo termine $Ay^2 - y^2 = 0$, s'avrà $A = 1$, col supporre il terzo termine $By^3 - Ay^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{y^3}{6} = 0$, e col sostituire in esso in vece di A il ritrovato valore $= 1$, s' avrà $B = \frac{1}{2}$, e operando nella stessa maniera, si troverà $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$.

Posti adunque tutti questi valori in vece delle majuscole, s' avrà

$$1+u=\overline{1+y}^{\,1+y}=1+y+y^2+\frac{y^3}{2}$$

$+\frac{y^4}{3}+\frac{y^5}{4}$ ec., e moltiplicando per dy, sarà $\overline{1+y}^{\,1+y}dy=dy+ydy+y^2dy$ $+\frac{y^3dy}{2}+\frac{y^4dy}{3}+\frac{y^5dy}{4}$, e integrando, sarà $\int\overline{1+y}^{\,1+y}dy$

$$=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{8}+\frac{y^5}{15}+\frac{y^6}{24}\text{ec.}=\int x^x dx$$

Quest' istessa integrazione si può ottenere in altra maniera ancora, del che noi tralascieremo di ragionare, bastandoci d' aver additata questa, perchè se ne faccia uso in altre consimili formole differenziali, che contengono quantità esponenziali.

281. Si è già veduto altrove, come si faccia uso delle quantità logaritmiche, ed esponenziali per risolvere i problemi numerici; e però basterà dare quì un saggio del calcolo di queste quantità nella soluzione de' problemi geometrici, e supponendo, che sia data l' equazione

di una curva logaritmica, o esponenziale, si vedrà come si venga a descrivere la curva, e come per mezzo di questo calcolo si determini di essa curva la sottotangente, la massima, o la minima ordinata, il punto di flesso contrario, la quadratura del suo spazio, e simili altre proprietà.

282. Debbasi descrivere la curva dell' equazione $x\sqrt{a} = l^{\frac{3}{2}} y$, e sia LGK la logaritmica, in cui si prendano i logaritmi della proposta equazione, e sia la sottotangente di questa logaritmica $= 1 = BG = a$.

FIGURA CIV.

Per descrivere l'addimandata curva si tiri la direttrice PM, e si noti in essa $PQ = BG = 1 = y = a$; siccome in questo caso sarà $ly = x = o$, così la curva da descriversi passerà pel punto Q. Se poi nella logaritmica si prenderà $y = HL$ minore di BG, sarà ly una quantità negativa, e però $l^{\frac{3}{2}} y = \sqrt{l^3 y}$ sarà quantità immaginaria, poichè si dee estrarre la radice quadrata da una quantità negativa; per la qual cosa x sarà immaginario, ognivoltachè si prenderà

FIGURA CV.

y = HL minore di BG = a; ma, se si prenderà y = FK maggiore di BG, allora s' avrà ly = BF quantità positiva. Risolta pertanto l' equazione in analogia, sarà $\sqrt{a} : \sqrt{ly} = ly : x$, o sia $a : \sqrt{aly} = ly : x$, cioè $BG : \sqrt{BG \times BF} = BF : x$. Fatta adunque PM = KF = y, ed alzata MN = x perpendicolare alla PM, sarà N un punto della curva ricercata.

Procedendo in questo modo si troveranno quanti punti si vogliono, e si descriverà l' addimandata curva, la quale si estenderà all' infinito verso O.

283. Per trovare la sottotangente della descritta curva (§. 282), si differenzi la sua equazione, e sarà

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times \frac{\sqrt{a}}{y},$$ e sostituito questo valore nella formola delle sottotangenti, sarà

$$\frac{ydx}{dy} = y \times \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times \frac{\sqrt{a}}{y} = \frac{3}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times \sqrt{a}$$

$$= \frac{3ax}{2ly}$$ la ricercata sottotangente.

Volendo trovare il punto di flesso contrario in questa curva, si prenderanno le seconde differenze della data equazione, e, supponendo dx costante, sarà

$$\frac{\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}yl^{\frac{1}{2}}yd^2y+\frac{3}{4}a^{\frac{3}{2}}dy^2l^{-\frac{1}{2}}y-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}dy^2l^{\frac{1}{2}}y}{y^2}=0,$$

e però sarà

$$d^2y=\frac{\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}dy^2l^{\frac{1}{2}}y-\frac{3}{4}a^{\frac{3}{2}}dy^2l^{-\frac{1}{2}}y}{\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}yl^{\frac{1}{2}}y}.$$

Ma pel metodo dei flessi contrari dee essere $d^2y=0$, adunque sarà

$$\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}dy^2l^{\frac{1}{2}}y-\frac{3}{4}a^{\frac{3}{2}}dy^2l^{-\frac{1}{2}}y=0,$$ e

correggendo l'espressione, sarà

$l^{\frac{1}{2}}y-\frac{1}{2}al^{-\frac{1}{2}}y=0$, e $ly=\frac{a}{2}$. Pertanto il punto del flesso contrario, quando $BF=ly$, sarà la metà della sottotangente $=a$ della logaritmica KGL.

284. Se la proposta equazione sarà $xlx = y$, risolta questa in analogia, s'avrà $1 : lx = x : y$, dopo del che si costruirà la curva nella divisata maniera (§. 282). Se l'equazione data sarà $x^2lx = y$, o pure $x^3lx = y$, o $x^{\frac{1}{3}} lx = y$, o più generalmente $x^nlx = y$, risolta pure l'equazione in analogia, sarà $1 : lx = x^n : y$, e presa nella logaritmica L G K un'ordinata B K $= x$, onde sia A B $= lx$, il moltiplice di A B secondo il numero n, se questo è intero, e il sottomoltiplice, se n è un rotto, darà la corrispondente ordinata x^n nella logaritmica, lo che mediante si costruirà la curva corrispondente alla proposta equazione.

FIGURA CVI.

285. Le curve esponenziali, o scorrenti si costruiscono per mezzo di una qualche logaritmica.

Sia $x^x = y$ l'equazione di una curva esponenziale. Si prendano i logaritmi di ciascun membro della proposta equazione, e si avrà $xlx = ly$. Si descriva la logaritmica LGHK colla sottotangente $= 1 =$ AG, e sia PAB il suo assintoto, sarà A il punto d'origine delle

FIGURA CVII.

ascisse. Da un qualsivoglia punto H della logaritmica si tiri l'ordinata HC, e dallo stesso punto H si tiri HN paralella all'assintoto PB, e si prolunghi AG verso R, sarà sempre $CH = AR$. Si chiami $CH = x$, sarà $AC = lx$, e risolta l'equazione $xlx = ly$ in analogia, s'avrà $1 : x = lx : ly$, o sia $AG : CH :: AC : \frac{AC \times CH}{AG} = l.y = AB$, e tirando dal punto B la BK paralella alla AG, sarà essa $BK = y$: essendo adunque per costruzione $AR = CH = x$, se dal punto R si noterà $RN = BK = y$, sarà N un punto della curva esponenziale NMOP appartenente all'equazione $x^x = y$, e continuando a prendere altri punti H nella logaritmica, ed operare nella divisata maniera, si verrà a descrivere la curva NMOP col mezzo di più punti, della quale la retta AR sarà la direttrice delle ascisse x, ed AP quella delle ordinate y.

Dalla data costruzione avviene, che la curva esponenziale NMOP sega l'assintoto PB in P distante dal punto A pel valore della sottotangente $= 1 = AG$; imperciocchè, se nella mentovata ana-

logia $1 : x = lx : ly$ si supporrà $x = 0$; sarà pure $ly = 0$, vale a dire, che il punto B cadrà in A, e quindi $BK = y$ diventerà $AG = AP$ ordinata della curva NMOP corrispondente all' ascissa zero. Se poi dal punto P si tira PM paralella, ed uguale alla AG, sarà pure M un punto della curva, poichè, essendo in questo caso $x = AG = 1$, sarà $lx = 0$, e però nell' analogia sarà anche $ly = 0$, e quindi $y = AG = AP = GM$, valore, che si compete alla costruzione della curva.

286. Se dal punto L, ove PM interseca la logaritmica, si tira LQ paralella alla PB, sarà l' intercetta OQ la minima ordinata y dell' esponenziale POMN; imperciocchè, differenziando l' equazione logaritmica $xlx = ly$, sarà

$$dx + dxlx = \frac{dy}{y}, \text{ e } ydx + ydxlx = dy;$$

ma pel metodo de' massimi, e de' minimi dee essere $dy = 0$, adunque sarà $ydx + ydxlx = 0$, e dividendo per ydx, e trasportando, sarà $1 = -lx = AP = AG$.

Dall' equazione differenziale $dx + dxlx = \frac{dy}{y}$ si ricava $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{1+lx}$, ma $\frac{ydx}{dy}$ è la formola per le sottotangenti, adunque la sottotangente della curva sarà $\frac{1}{1+lx}$, la quale diverrà $= 1$ pel punto M, poichè in questo caso, essendo la sua ascissa AG $= 1$ (§. 285), sarà $lx = 0$, e quindi l' espressione $\frac{1}{1+lx}$ diverrà $\frac{1}{1+0} = 1$.

Per avere lo spazio POMNRA nella formola generale ydx per la quadratura degli spazi, si sostituisca il valore di y preso dall' equazione $x^x = y$ della curva (§. 284), e sarà $ydx = x^x dx$, e integrando quest' espressione, avremo (§. 280) $x + \frac{x^2 lx}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3 l^2 x}{6} - \frac{x^3 lx}{9} + \frac{x^4 l^3 x}{24} - \frac{x^4 l^2 x}{32}$ ec. pel ricercato spazio.

Se poi si prenderà $x = AG = 1$, siccome sarà $lx = 0$, la serie suddetta

diventerà $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$ ec., o sia $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ ec., e la somma di questa serie; la di cui legge essendo cognita, somministrerà il valore della superficie POMGA.

287. Abbiasi da costruire la curva dell' equazione $x^y = c$, sarà la sua equazione logaritmica $ylx = lc$, e conseguentemente si potrà costruire per mezzo della logaritmica, come s' è fatto (§. 284).

Se di questa curva esponenziale si vorrà trovare la sottotangente basterà differenziare l' equazione logaritmica $ylx = lc$, e s' avrà $dylx + \frac{ydx}{x} = 0$ (supposta la sottotangente della logaritmica $= 1$). Pertanto s' avrà $\frac{ydx}{x} = - dylx$, e quindi $\frac{ydx}{dy} = - xlx$, ma la formola delle sottotangenti è $\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà $- xlx$ la sottotangente della curva esponenziale $x^y = c$.

288. Se fosse proposro da costruire la curva dell' equazione $x^x = c^y$, presa

la sua equazione logaritmica $xlx = ylc$, si opererà, come è stato detto (§. 284), per mezzo di questa logaritmica.

Se poi si prenderà la differenza dell' equazione $xlx = ylc$, si troverà $dx + dxlx = dylc$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{lc}{1 + lx}$, e sostituendo questo valore nella formola generale delle sottotangenti, e scrivendo $\frac{xlx}{lc}$ in vece di y, s' avrà $\frac{ydx}{dy} = \frac{xlx}{1 + lx}$ per la sottotangente della proposta curva.

Finalmente, se nella formola generale per la quadratura degli spazi ydx si sostituirà il valore suddetto di y, sarà $ydx = \frac{xlxdx}{lc}$, e integrando a tenore del §. 274, s' avrà $\frac{2x^2lx - x^2}{4lc}$ per lo spazio ricercato.

Ne' seguenti Trattati si vedrà, come per mezzo dei dati principj si vengano a risolvere i problemi Fisico-meccanici, e specialmente quelli, che alla professione d' Artigliero, e d' Ingegnere s' appartengono.

Fine de' principj di Matematica sublime.

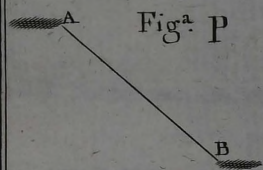
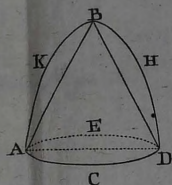
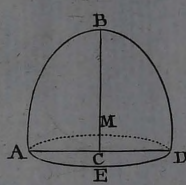



Tavola 1.ª
Figª. P
Figª. 1.ª
Figª. 2.
Figª. 3.
Figª. 4.
Figª. 5.
Figª. 6.
Figª. 7.
Figª. 8.
Figª. 9.
Figª. 10.
Figª. 11.
Figª. 12.
Figª. 13.
Figª. 14.
Figª. 15.
Figª. 16.
Figª. 17.
Amati, e Pola sc.

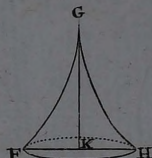
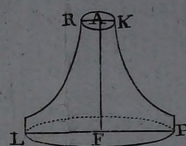
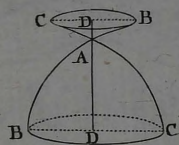
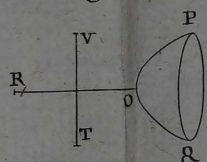
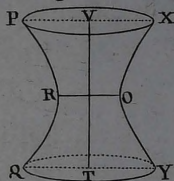
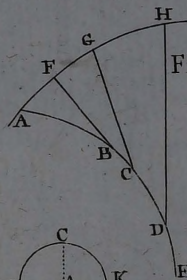
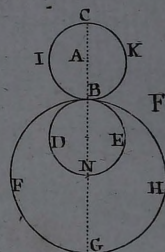
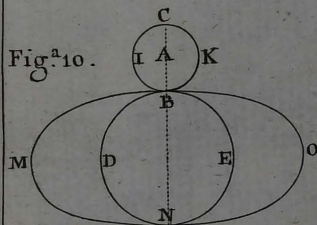
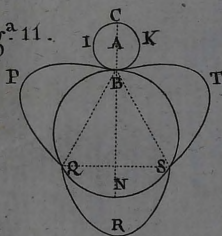
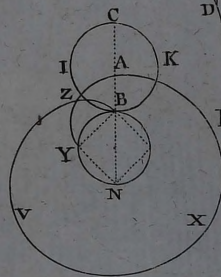
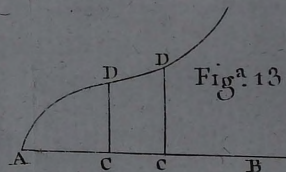
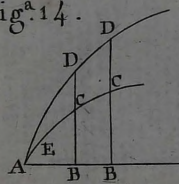
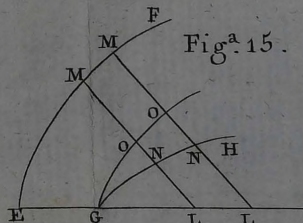
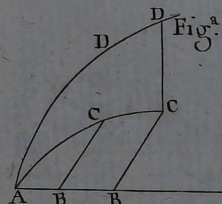
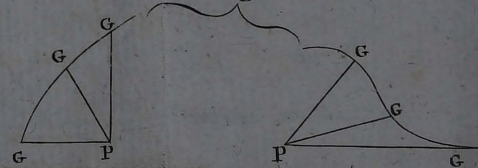
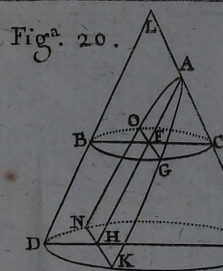
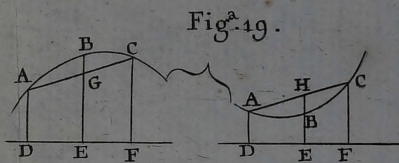
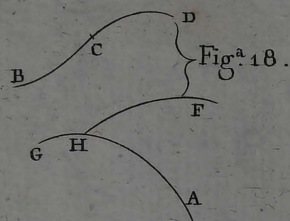



Tavola 2.
Figa. 18.
Figa. 19.
Figa. 20.
Figa. 21.
Fig. 22.
Figa. 23.
Figa. 24.
Figa. 25.
Figa. 26.
Figa. 27.
Figa. 28.
Figa. 29.
Figa. 30.
Figa. 31.
Figa. 32.

Tavola . 3 .
Figª. 33 .
Figª. 34 .
Figª. 35 .
Figª. 36 .
Figª. 37 .
Figª. 38 .
Figª. 39 .
Figª. 40 .
Figª. 41 .
Figª. 42 .
Figª. 43 .
Figª. 44 .
Figª. 45 .
Figª. 46 .
Figª. 47 .
Amati e Pela sc.

Tavola 4.
Figa. 48.
Figa. 49.
Figa. 50.
Figa. 51.
Figa. 52.
Figa. 53.
Figa. 54.
Figa. 55.
Figa. 56.
Figa. 57.
Amati, e Tela sc.

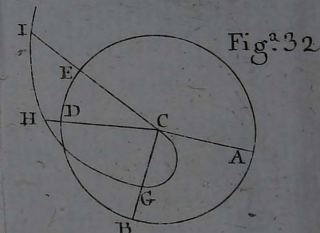
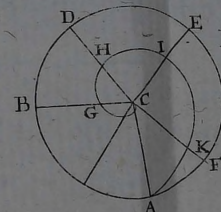
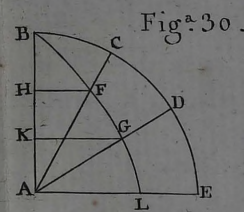
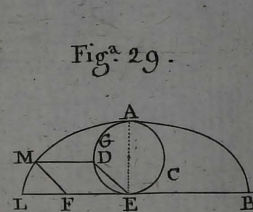
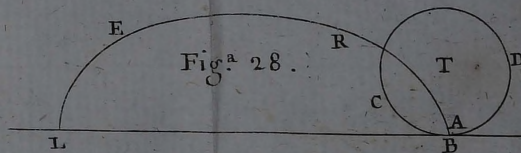
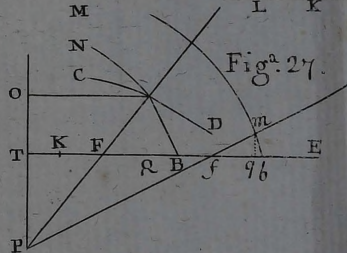
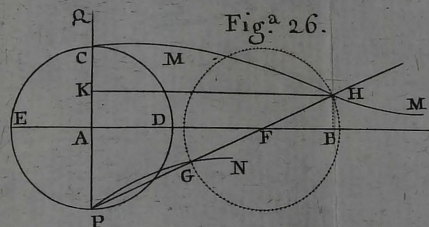
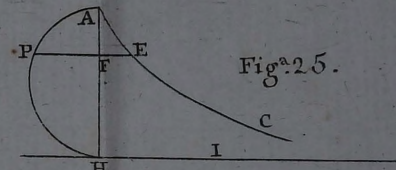
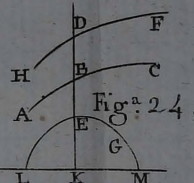
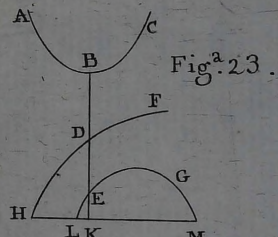
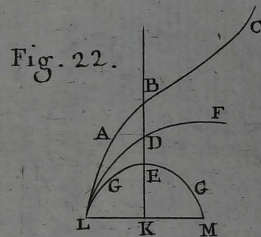
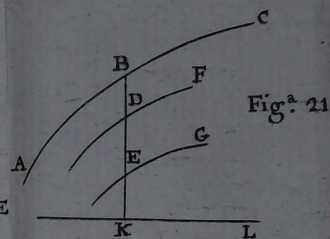
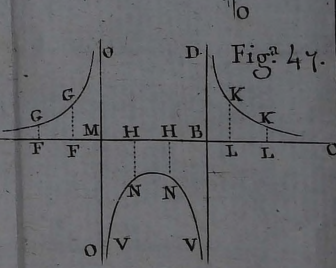
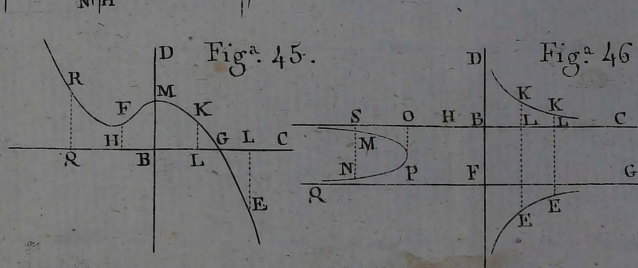
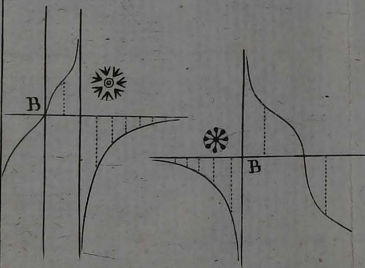
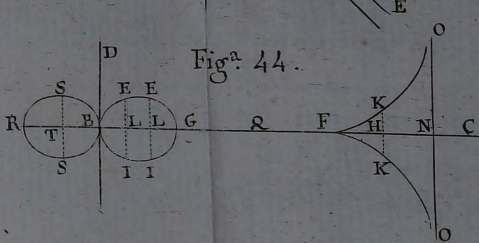
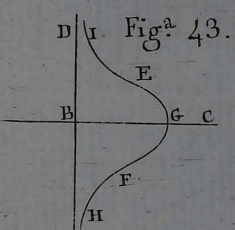
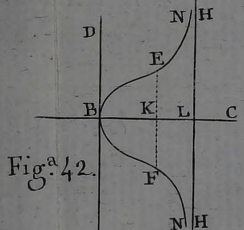
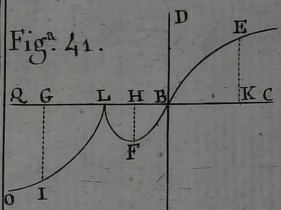
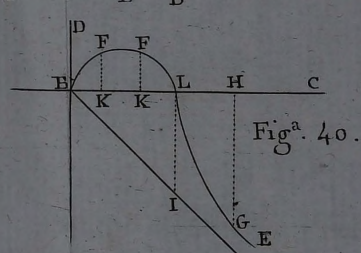
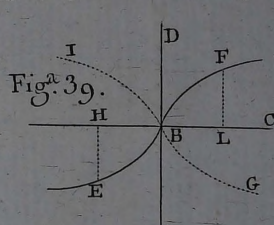
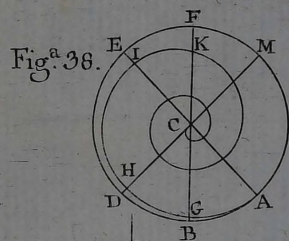
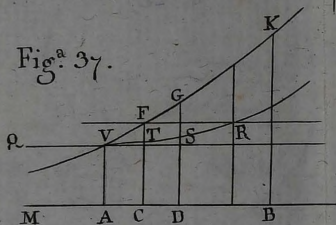
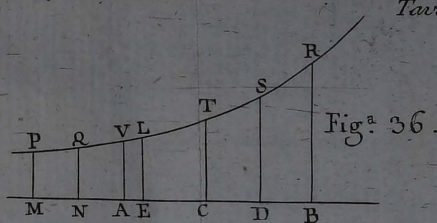
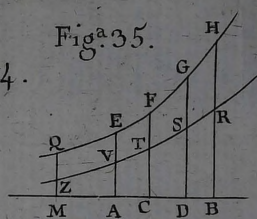
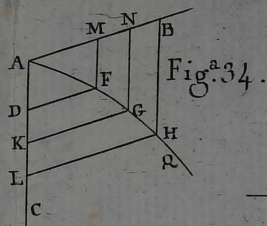
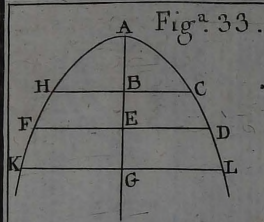
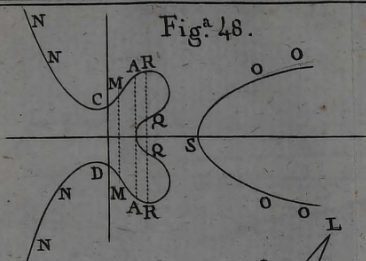
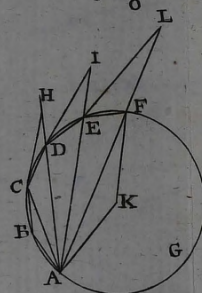
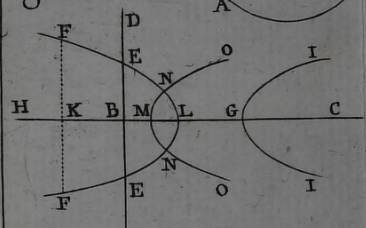
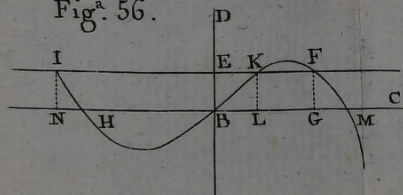
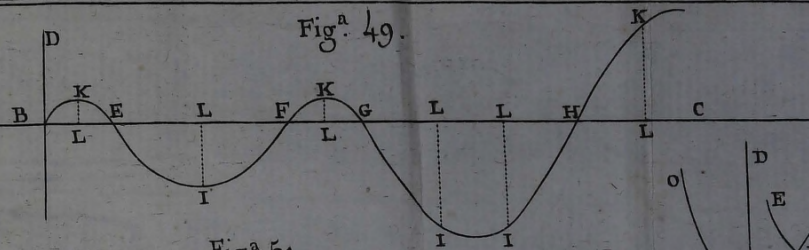
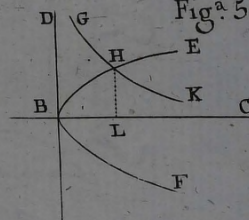
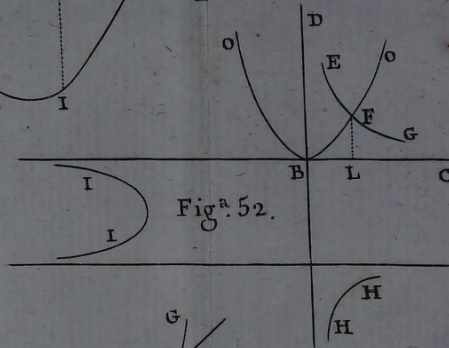
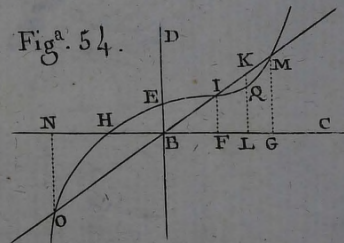
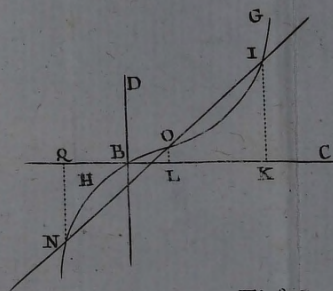
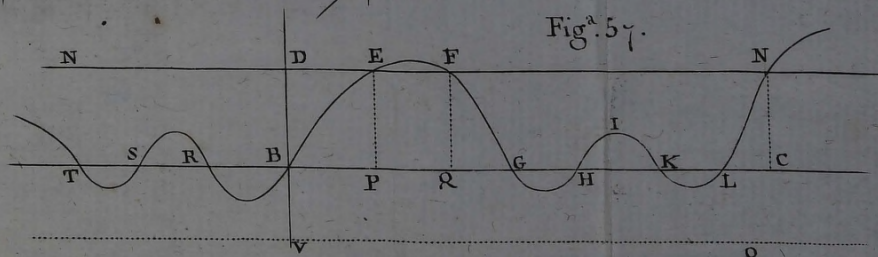
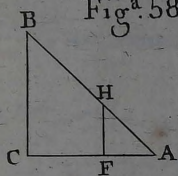
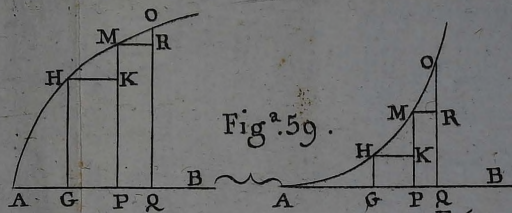
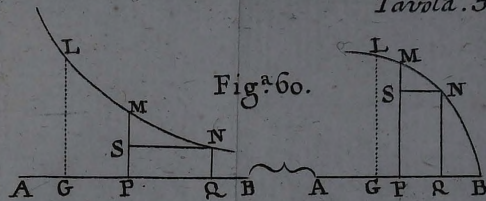



Tavola. 5.
Figª. 58.
Figª. 59.
Figª. 60.
Figª. 61.
Figª. 62.
Figª. 63.
Figª. 64.
Figª. 65.
Figª. 66.
Figª. 67.
Figª. 68.
Figª. 69.
Figª. 70.
Figª. 71.
Amati, e Tela sc.

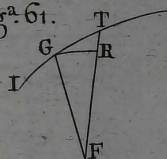
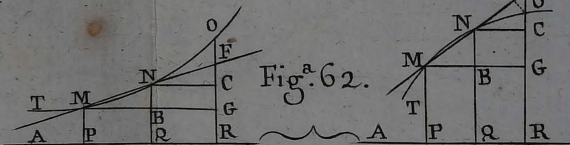
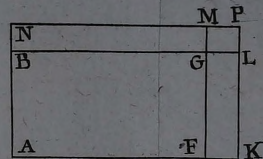
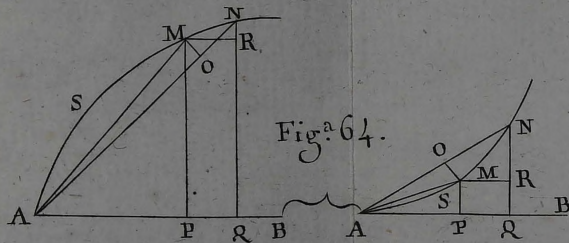
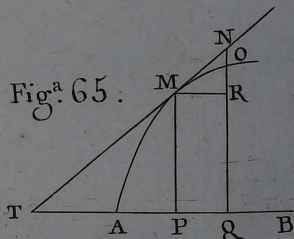
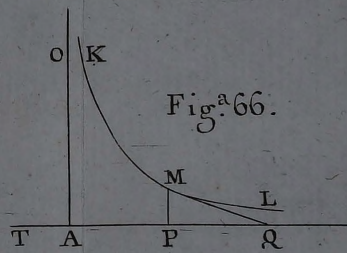
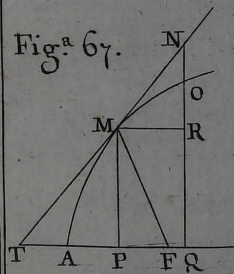
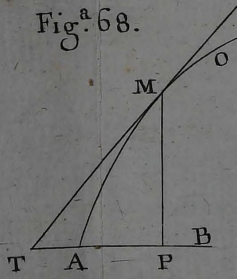
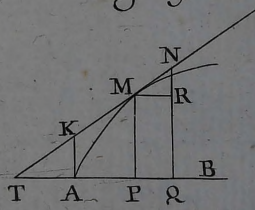
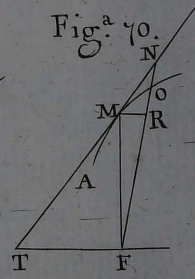
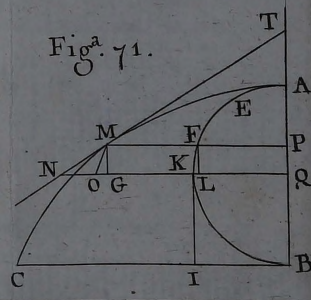
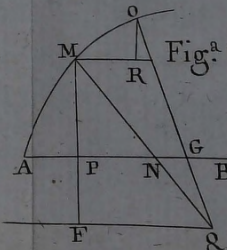
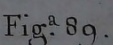
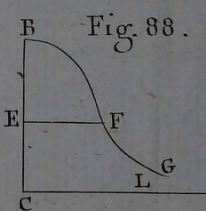
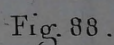
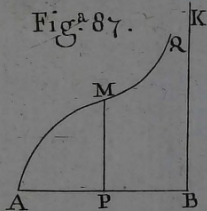
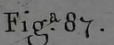
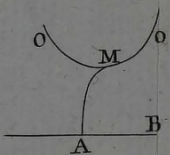
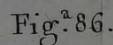
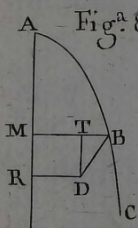
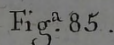
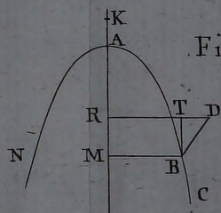
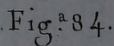
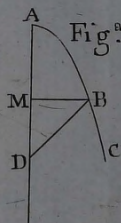
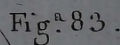
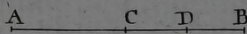
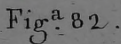
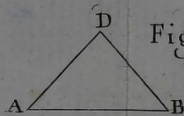
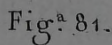
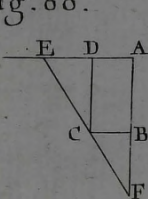
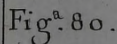
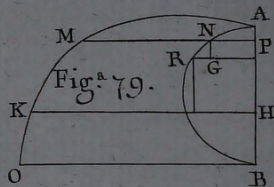
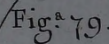
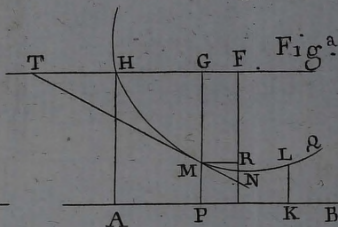
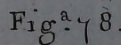
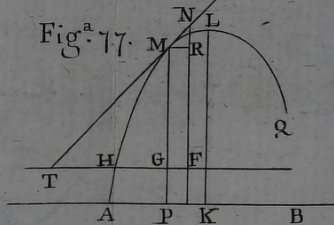
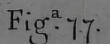
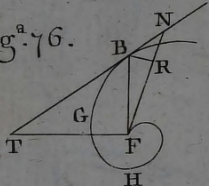
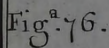
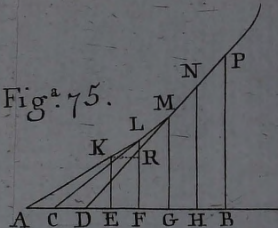
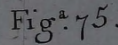
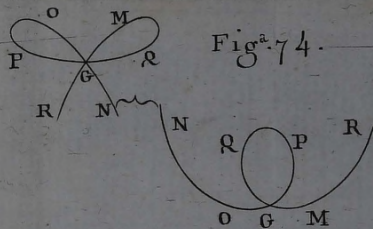
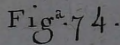
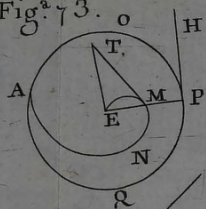
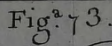
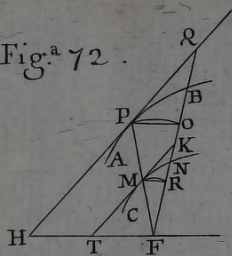
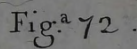
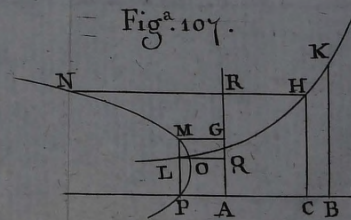
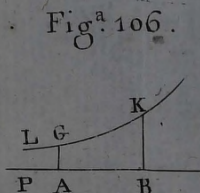
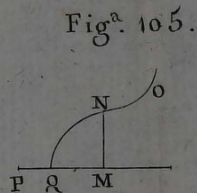
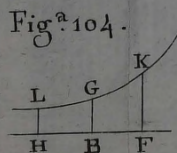
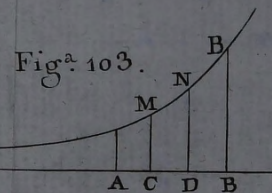
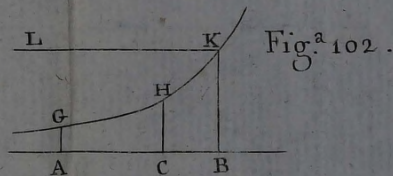
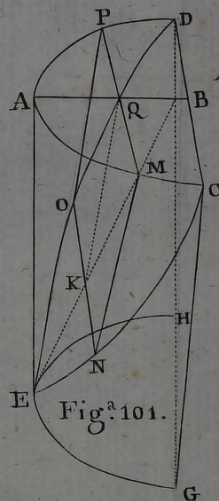
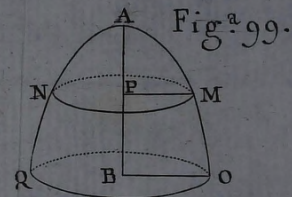
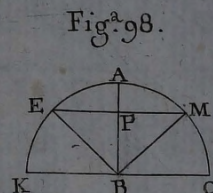
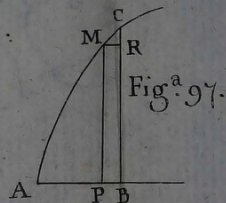
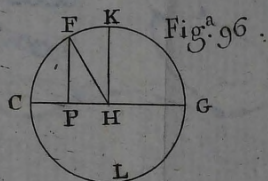
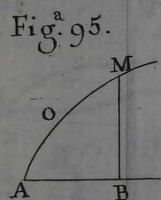
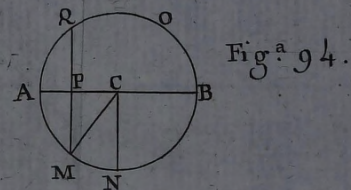
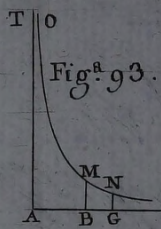
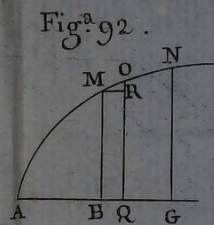
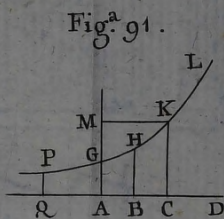
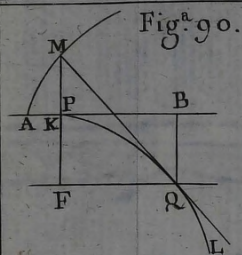



Tavola 6.
Figa. 72.
Figa. 73.
Figa. 74.
Figa. 75.
Figa. 76.
Figa. 77.
Figa. 78.
Figa. 79.
Figa. 80.
Figa. 81.
Figa. 82.
Figa. 83.
Figa. 84.
Figa. 85.
Figa. 86.
Figa. 87.
Fig. 88.
Figa. 89.

Tavola 7.
Figa. 90.
Figa. 91.
Figa. 92.
Figa. 93.
Figa. 94.
Figa. 95.
Figa. 96.
Figa. 97.
Figa. 98.
Figa. 99.
Figa. 100.
Figa. 101.
Figa. 102.
Figa. 103.
Figa. 104.
Figa. 105.
Figa. 106.
Figa. 107.

formazione delle equazioni e loro trasformazioni

moltiplicare per un numero i valori dell'incognita in un equazione —

applicazione di questo per far sparire i rotti — caso di più rotti

questo mezzo può in alcune occasioni servire per far sparire i radicali come nell'equazione

$z^3 - az^2\sqrt[3]{4} + c^2z\sqrt[3]{16} - c^3 = 0$ si scrive $z^3 - \frac{az^2\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{c^2z\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}} - \frac{c^3}{2} = 0$ e poi si moltiplica — sempre in casi molto particolari

trasformare le equazioni per la divisione questo mezzo serve ancora in qualche caso particolare a far sparire i rotti

$z^4 - z^3\sqrt{c} + cdz^2 + cm^2z\sqrt{c} + c^2f^2 = 0$ si scrive

$$\frac{z^4 - z^3\sqrt{c}}{\sqrt{c}} + \frac{cdz^2}{c} + \frac{cm^2z\sqrt{c}}{c\sqrt{c}} + \frac{c^2f^2}{c^2} = 0$$

esaminare se è vera la regola per indagare se vi sono radici immaginarie